M1 GEOMETRIE - FORMES DIFFÉRENTIELLES ET AIRE novembre 2011

Exercice 1 Soient ω et η les formes différentielles sur $\mathbb{R}^3$ définies par

$$\begin{aligned}\omega(x,y,z) &= \mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y\\ \eta(x,y,z) &= e^x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + xy\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Calculer les formes $\omega\wedge\omega$, $\omega\wedge\eta$ et $\eta\wedge\eta$.

Exercice 2 Pour chacune des formes différentielles ω suivantes, définies sur un domaine D, dire si ω est fermée, si elle est exacte, et dans ce cas trouver les formes différentielles η sur D telles que $\omega = \mathrm{d}\eta$.

1. $\omega(x,y) = 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $\omega(x,y) = \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ sur $D=\{x>0, y>0\}$. Et sur $\mathbb{R}^2_*$?
3. $\omega(x,y) = \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{xy}$ sur $D=\{x>0, y>0\}$.
4. $\omega(x,y) = y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ sur $\mathbb{R}^2$.
   [*Hint*: Chercher η sous la forme $\eta(x,y) = f(x,y)\,\mathrm{d}x$ ou $\eta(x,y) = g(x,y)\,\mathrm{d}y$.]
5. $\omega(x,y,z) = 2xz\,\mathrm{d}x + f(y)g(z)\,\mathrm{d}y + (x^2+\dfrac{y^2}{2})\,\mathrm{d}z$ sur $\mathbb{R}^3$, où f et g sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
6. $\omega(x,y,z) = x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$ sur $\mathbb{R}^3$.
   [*Hint*: Chercher η sous la forme $\eta(x,y,z) = f(y,z)\,\mathrm{d}x + g(x,z)\,\mathrm{d}y$.]
7. $\omega(x,y,z) = x^2z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^2z\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - xy^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ sur $\mathbb{R}^3$.
8. $\omega(x,y,z) = 2xz\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + 2yz\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - (x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ sur $\mathbb{R}^3$. Et sur $D=\{z=0\}$?
9. $\omega(x,y,z) = (3y^2z - 3xz^2)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + x^2y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (z^3 - x^2z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ sur $\mathbb{R}^3$.
   [*Hint*: Chercher η sous la forme $\eta(x,y,z) = f(x,y,z)\,\mathrm{d}x + g(x,z)\,\mathrm{d}y + h(y,z)\,\mathrm{d}z$.]

Exercice 3 Soit $\Phi : \mathbb{R}^*_+\times]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{x=0, y\le 0\}$ la bijection définie par

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) =: (x,y).$$

Soient ω et η les formes différentielles définies sur $\mathbb{R}^2\setminus\{x=0,y\le 0\}$ par

$$\begin{aligned}\omega(x,y) &= x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y,\\ \eta(x,y) &= \frac{x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Déterminer les images réciproques $\Phi^*\omega$ et $\Phi^*\eta$ des formes ω et η par l'application Φ.

Exercice 4 Soit $\Phi : \mathbb{R}^*_+\times]0,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^3\setminus\{x=0, y\le 0\}$ la bijection définie par

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) =: (x,y,z).$$

Soient ω et η les formes différentielles définies sur $\mathbb{R}^3\setminus\{x=0,y\le 0\}$ par

$$\begin{aligned}\omega(x,y,z) &= x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z,\\ \eta(x,y,z) &= \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\end{aligned}$$

Déterminer les images réciproques $\Phi^*\omega$ et $\Phi^*\eta$ des formes ω et η par l'application Φ.

Exercice 5 1. Déterminer toutes les 1-formes $SO(2)$-invariantes de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer toutes les 2-formes $SO(2)$-invariantes de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 La *courbe cardioïde* est la courbe plane définie en coordonnées polaires par $r(\varphi) = 1 + \cos\varphi$ (ou $r(\varphi) = 1 + \sin\varphi$ etc).

1. En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer l'aire du domaine D du plan delimité par la courbe cardioïde.
2. Vérifier l'inegalité isoperimétrique pour la courbe cardoïde.

Exercice 7 Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le (1 - x)^2\}.$$

1. Calculer l'aire de D en utilisant la formule de Green-Riemann.
2. Calculer l'intégrale double
$$I = \int\int_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
3. Calculer l'intégrale curviligne
$$J = \int_{\partial D^+} (2y - y^3)\,\mathrm{d}x + (2x + x^3)\,\mathrm{d}y.$$
4. Comparer I et J. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 8 Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par les paraboles

$$\mathcal{P}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = x^2\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x = y^2\},$$

et soit α la forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\alpha(x, y) = (2x + 3y^2)\,\mathrm{d}x + (6xy + \cos y)\,\mathrm{d}y.$$

1. Calculer l'aire de D par un calcul direct et en utilisant la formule de Green-Riemann.
2. Montrer que la forme α est fermée.
3. Montrer que la forme α est exacte et déterminer une primitive.
4. On note $A = (0, 0)$ et $B = (1, 1)$. Calculer l'intégrale curviligne de α le long du circuit formé par la portion de $\mathcal{P}_1$ allant de A vers B, puis celle de $\mathcal{P}_2$ allant de B vers A.