M1 GEOMETRIE - INDICE DE ROTATION novembre 2011

Rappellons que si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe fermée du plan, parametrée par $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \rho(t)e^{i\varphi(t)}$ avec $\gamma(a) = \gamma(b)$, et ne passant pas par $O = (0,0)$, on appelle

– **nombre de tours de** γ **par rapport à** O : $N(\gamma, O) := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_a^b \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} dt = \frac{1}{2\pi}\big(\theta(b) - \theta(a)\big) \in \mathbb{Z}$;

– **indice de rotation de** γ : $Ind(\gamma) := N(\gamma', O) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_a^b \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2} dt = -\frac{1}{2\pi}\int_a^b k_\gamma^{alg}(t)\ |\gamma'(t)| dt.$

Hypothèse : dans les exercices suivants sur le nombre de tours et l'indice, supposons que $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ soit une courbe C^1 fermée, avec $\gamma(a) = \gamma(b)$, et ne passant pas par $O = (0,0)$.

Exercice 1 1. Montrer que le nombre de tours de γ par rapport à O est donné par

$$N(\gamma, O) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\gamma(t) \wedge \gamma'(t)}{|\gamma(t)|^2}\ dt.$$

2. Interprétation complexe. En identifiant $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, on considère γ comme une courbe à valeurs complexes. Montrer que

$$N(\gamma, O) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\ dt.$$

Demontrer la formule de Cauchy suivante :

Théorème de Cauchy. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $a \in D$ et $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow D \setminus \{a\}$ une courbe fermée dans D, ne passant pas par a et homotope à un point. Alors

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\ dz = f(a)\ N(\gamma, a).$$

Exercice 2 1. Montrer que $N(-\gamma, O) = N(\gamma, O)$.

2. Montrer que le nombre de tours d'une courbe γ de $\mathbb{R}^2$ par rapport à l'origine $O = (0,0)$ ne change pas si on fait varier γ de manière continue sans passer par O.
Plus précisement, soit $\gamma : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application continue que l'on interprète comme famille continue de courbes $\gamma_u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ pour tout $u \in [0,1]$: $\gamma_u(t) = \gamma(t,u)$. Supposons que $\gamma_u(t) \neq O = (0,0)$ pour tout $u \in [0,1]$ et tout $t \in [a,b]$, et supposons que $\gamma_u(a) = \gamma_u(b)$ pour tout $u \in [0,1]$. Montrer que $N(\gamma_1, O) = N(\gamma_0, O)$.

Exercice 3 1. Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une courbe plane C^1 fermée, ne passant pas par $(0,0)$. Supposons que γ intersecte le demi-axe $y = 0$, $x > 0$ un nombre fini de fois, et que sa tangente en tout point d'intersection soit differente de la droite $y = 0$ (autrement dit, si $y(t) = 0$ alors $y'(t) \neq 0$).
Soit n_+ (resp. n_-) le nombre d'intersection où $y'(t) > 0$ (resp. $y'(t) < 0$). Montrer que $N(\gamma, O) = n_+ - n_-$.

2. Calculer l'indice de la courbe $\gamma(t) = (\sin 2t, \cos 3t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 4 1. Soient $\alpha, \beta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ deux courbes C^1 telles que $\alpha(a) = \alpha(b)$ et $\beta(a) = \beta(b)$.

(a) Supposons qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que l'angle compri entre $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ ne soit jamais égal à $c \bmod (2\pi)$. Montrer que $N(\alpha, O) = N(\beta, O)$.

(b) Supposons que $|\beta(t)| < |\alpha(t)|$ pour tout $t \in [a,b]$. Montrer que $N(\alpha + \beta, O) = N(\alpha, O)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\gamma_n(t) = \big(2\cos t + \cos(nt), 2\sin t + \sin(nt)\big)$, avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

(a) Dessiner la courbe γ_4.

(b) Calculer le nombre de tours de γ_n par rapport au point $(0,0)$.

(c) Calculer l'indice de γ_n.