M1 GEOMETRIE - SURFACES RÉGLÉES novembre 2011

Les **surfaces réglées** sont les surfaces engendrées par le mouvement d'une famille à un paramètre de droites (dites alors ses **génératrices**).

Définitions. Soient $\alpha, \beta : I \to R^3$ deux courbes paramétrées, avec $\beta(u) \neq 0$ pour tout u. La surface paramétrée $f(u,v) = \alpha(u) + v\ \beta(u)$, pour $u \in I$ et $v \in R$, s'appelle **surface réglée** de **directrice** la courbe α et de **génératrice** la droite Δ_u passant par $\alpha(u)$ et de vecteur générateur $\beta(u)$.

Soient ℓ une droite et P un plan fixe secant ℓ. On appelle **conoïde d'axe** ℓ **et plan directeur** P la surface réglée dont la directrice est la droite ℓ et la génératrice est toujours parallèlle au plan P.

Si ℓ est orthogonal à P, on dit qu'on a un **conoïde droit**. Un tel conoïde est défini par le vissage d'une droite orthogonale à l'axe de vissage.

Exercice 1 Soit S la surface réglée de directrice α et vecteur générateur β.

1. Trouver les conditions sur α et β pour qu'un point $f(u,v) \in S$ soit singulier.
2. Montrer que pour une droite génératrice Δ_u on a les cas suivants:
   (a) Δ_u ne contient aucun point singulier;
   (b) Δ_u contient exactement un point singulier $f(u, v_0)$, et si $v_0 \neq 0$ alors le plan tangent à S reste le même le long de Δ_u;
   (c) tous les points de Δ_u sont singuliers.
3. Calculer la première forme fondamentale de la surface réglée.
4. Calculer la seconde forme fondamentale.
5. Calculer la courbure de Gauss de cette surface et montrer qu'elle est nulle en un point régulier $f(u,v)$ si et seulement si les vecteurs $\alpha'(u)$, $\beta(u)$ et $\beta'(u)$ sont liés.

Exercice 2 L'**hélicoïde**, ou **escalier en colimaçon**, est la surface parametrée par $f(u,v) = (v\cos u, v \sin u, au)$, avec $u, v \in \mathbb{R}$.

1. Interpreter l'hélicoïde comme une surface réglée. Faire un dessin.
2. Demontrer que l'hélicoïde est un conoïde.
3. Déterminer la normale à l'hélicoïde le long de la droite Δ_u.
4. Est-ce que l'hélicoïde est régulier le long de son axe ?
5. Calculer la première et la seconde forme fondamentale.
6. Calculer les courbures principales, la courbure de Gauss et la courbure moyenne.
7. Trouver les lignes de courbure.
8. Trouver les courbes asymptotiques.

Exercice 3 L'**hyperboloïde à une nappe** est la surface définie par l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Paramétrer l'hyperboloïde comme une surface réglée. Faire un dessin. [Pour cela, déterminer l'intersection de l'hyperboloïde avec le plan $x = 1$ et trouver deux familles de droites qui remplissent l'hyperboloïde.]
2. Calculer la première et la seconde forme fondamentale.
3. Calculer les courbures principales, la courbure de Gauss et la courbure moyenne.
4. Trouver les lignes de courbure.
5. Trouver les courbes asymptotiques.

Exercice 4 Le **paraboloïde hyperbolique** est la surface définie par l'équation $z = xy$.

1. Paramétrer le paraboloïde comme une surface réglée. Faire un dessin.
2. Montrer que le paraboloïde hyperbolique est un conoïde.
3. Calculer la première et la seconde forme fondamentale.
4. Calculer la courbure de Gauss et la courbure moyenne.
5. Trouver les courbes asymptotiques.

Exercice 5 Le **conoïde de Plücker** est la surface d'équation $z = xy/(x^2 + y^2)$.

1. Paramétrer le conoïde de Plücker comme une surface réglée. Faire un dessin.
2. Montrer que le conoïde de Plücker est un conoïde d'axe $0z$.
3. Est-ce que le conoïde de Plücker est régulier ?
4. Calculer la première et la seconde forme fondamentale.

Exercice 6 La **bande de Möbius** est la surface reglée M parametrée par $f(u, v) = \alpha(u) + v\ \beta(u)$ pour $u, v \in \mathbb{R}$, avec directrice

$$\alpha(u) = (\cos u, \sin u, 0)$$

et vecteur générateur

$$\beta(u) = (\cos u/2 \cos u, \cos u/2 \sin u, \sin u/2).$$

1. Dessiner la bande de Möbius pour $u \in R$, $v \in [-1/4, 1/4]$.
2. Déterminer la normale de la bande de Möbius aux points $v = 0$.
   Peut-on choisir un vecteur normal continu comme fonction du point $P \in M$?
3. Calculer la première et la seconde forme fondamentale.
4. Calculer les courbures principales, la courbure de Gauss et la courbure moyenne.
5. Trouver les courbes asymptotiques.

Exercice 7 Soit γ une courbe régulière sur la surface S. On considère la surface réglée M constituée des normales à S le long de γ. Montrer que γ est une ligne de courbure de S si et seulement si la courbure de Gauss de M est nulle.

Exercice 8 Soient S une surface régulière et $\gamma : I \longrightarrow S$ une courbe régulière C^∞, paramétrée par l'abscisse curviligne s. On suppose que γ n'est nulle part tangente à une direction asymptotique de S.

On considère la surface reglée M parametrée par

$$f(s, v) = \gamma(s) + v\vec{N}(s) \wedge \vec{N}'(s),$$

où $\vec{N}(s)$ désigne une normale unitaire à S au point $\gamma(s)$.

1. Montrer que M est une surface régulière au voisinage de tout point $(s, 0)$.
2. Décrire M lorsque γ est un équateur d'une sphère.
3. Décrire M lorsque γ est un cercle d'une sphère.
4. Comparer le plan tangent à M et le plan tangent à S en $\gamma(s)$.
5. Déterminer la courbure de Gauss de M en tout point régulier.

Exercice 9 Soit γ une courbe birégulière de R^3. Soit $B(u)$ la binormale en $\gamma(u)$. On considère la surface réglée S définie par $f(u, v) = \gamma(u) + v\ B(u)$.

1. Montrer que S est régulière au voisinage de la courbe γ.
2. Montrer que γ est une géodésique sur S.