M1 GEOMETRIE - SURFACES DE RÉVOLUTION **décembre 2011**

Définition. Soit P un plan, Γ une courbe de P, et ℓ une droite de P. On appelle **surface de révolution** d'axe ℓ et de méridien Γ la surface engendrée par la rotation de Γ autour de ℓ.

Exercice 1 Soit S la surface de révolution d'axe $\ell = \vec{Oz}$ et méridien $\Gamma = \{\alpha(u) = (r(u), 0, h(u)), u \in U\}$ contenu dans le plan $\{y = 0\}$.

1. Paramétrer la surface de révolution S, les méridiens et les parallèles.
2. Donner une condition suffisante pour que S soit régulière.
3. Montrer que la normale à la surface de révolution coupe l'axe ℓ ou est parallèlle à ℓ; donc elle coïncide avec la normale principale au méridien.
4. Calculer la première forme fondamentale (paramétrer le méridien par son abscisse curviligne).
5. Calculer la seconde forme fondamentale.
6. Déterminer les courbures principales et les lignes de courbure.
7. Calculer la courbure moyenne et la courbure de Gauss. Montrer que si $||\alpha'(u)|| = 1$, alors $K = -r''/r$.

   Donner un critère illustrant le signe de la courbure de Gauss selon le profil du méridien.
8. Trouver les équations des géodésiques et l'équation de leur trajectoire. Décrire leur comportement sur la surface.

Questions des exercices 2–8. Pour chaque surface donnée, repondre aux questions suivantes:

1. Donner une paramétrisation de la surface comme surface de révolution. Dessiner les méridiens et les parallèles.
2. Calculer la première et la seconde forme fondamentale.
3. Calculer les courbures principales, la courbure de Gauss et la courbure moyenne.
4. [Facultatif.] Décrire les géodésiques qui ne sont pas des méridiens et des parallèles.

Exercice 2 Le **tore** est la surface définie par la révolution d'un cercle autour d'un axe qui n'intersecte pas le cercle. Dessiner les zones de courbure de Gauss positive et negative, selon la forme du meridien.

Exercice 3 Le **caténoïde** est la surface de révolution d'axe $\vec{Oz}$ et méridien $\alpha(u) = (\operatorname{ch} u, 0, u)$, $u \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 Le **cylindre** est la surface définie par l'équation $x^2 + y^2 = r^2$, où $r > 0$ est un paramètre fixé.

Exercice 5 Le **cône** est la surface définie par l'équation $z^2 = x^2 + y^2$.

Exercice 6 L'**ellipsoïde** est la surface définie par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, où on suppose que $a, b > 0$ soient des paramètres fixés.

Exercice 7 L'**hyperboloïde à une nappe** est la surface définie par l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Exercice 8 L'**hyperboloïde à deux nappes** est la surface définie par l'équation $x^2 - y^2 - z^2 = 1$.

Exercice 9 (Surfaces de révolution de courbure de Gauss constante.)

Soit S la surface de revolution d'axe $\vec{Oz}$ et méridient $\alpha(u) = (r(u), 0, h(u))$ parametré par l'abscisse curviligne (i.e. $r'(u)^2 + h'(u)^2 = 1$).

1. Montrer que toute surface de révolution de courbure de Gauss $K \equiv 1$ est donnée par $r(u) = a \cos u$, $h(u) = \int^u \sqrt{1 - a^2 \sin^2 t} dt$.

   Dessiner les profils pour $a < 1$, $a = 1$, $a > 1$.
2. Montrer que toute surface de révolution de courbure de Gauss $K \equiv -1$ est d'un de trois types suivants:

   (a) $r(u) = a \cosh u$, $h(u) = \int^u \sqrt{1 - a^2 \sinh^2 t} dt$.

   (b) $r(u) = a \sinh u$, $h(u) = \int^u \sqrt{1 - a^2 \cosh^2 t} dt$.

   (c) $r(u) = e^u$, $h(u) = \int^u \sqrt{1 - e^{2t}} dt$.

   Dessiner les profils.
3. Quelles sont les surfaces de révolution de courbure de Gauss nulle?