Géométrie différentielle appliquée à la physique
Cours M2 - Lyon 1 - automne 2010

Alessandra Frabetti
Institut Camille Jordan, CNRS UMR 5028, Université Lyon 1,
21 avenue Claude Bernard, 69622 Villeurbanne, France.
frabetti@math.univ-lyon1.fr

17 décembre 2010

Version provisoire, car erreurs éparpillés, preuves incomplètes et texte superficiel surout à la fin.

Merci de me signaler erreurs et commentaires en écrivant à

frabetti@math.univ-lyon1.fr

M2 Lyon – Cours de Géométrie 2010

Table des matières

1 Action et équations d'Euler-Lagrange

1.1 Espace des configurations, espace des vitesses et espace des phases

Un **système mécanique** (classique) est donné en chaque instant par ce que l'on appelle une **configuration** q. Appellons C l'espace des configurations.

– Si le système décrit des particules macroscopiques, une configuration est un vecteur $(q^1, ..., q^m)$ qui réunie leurs informations réelles q^i, et C est en général une varieté localement difféomorphe à R^m, c'est à dire une varieté différentiable. Par exemple, pour deux points materiels dans l'espace on a $C = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ et $q = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$, pour un point contraint sur une sphère on a $C = \mathbb{S}^2$ et localement $q = (x^1, x^2)$.
– Si le système décrit des ondes, ou des particules microscopiques qui sont assimilés à des ondes, une configuration est un ensemble de champs $(\Phi^1, ..., \Phi^m)$, c'est-à-dire un ensemble de fonctions ou de sections d'un fibré sur une varieté différentiable M (typiquement l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$ ou l'espace de Minkowski $\mathbb{M}$). Dans ce cas, l'ensemble des configurations C est en général localement difféomorphe à un espace vectoriel (et parfois globalement) mais de dimension infinie. Par exemple, on peut avoir $q = X$, un champ de vecteurs sur M, et $C = \mathfrak{X}(M)$, ou bien $q = A$, une 1-forme sur M à valeurs dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et $C = \Omega^1(M; \mathfrak{g})$.

Admettons que, au delà des problèmes qui peuvent surgir en cas de dimension infinie, ces deux types de systèmes puissent être décrit de façon analogue.

Le système est **dynamique** lorsque les configurations bougent dans le temps, sous l'effet de forces, et décrivent des courbes orientées dans C. Le système dynamique est alors connu si pour toute configuration de départ q_0 on connait son evolution dans le temps γ. Nous allons illustrer dans cette introduction que γ se trouve comme solution d'une équation différentielle du deuxième ordre, et qu'elle dépend donc non seulement de la configuration q_0 mais aussi d'une autre quantité de départ (la vitesse ou l'impulsion).

La **vitesse** d'une configuration q en mouvement le long d'une courbe γ est un vecteur v tangent à γ en q. L'ensemble des vitesses est donc le fibré tangent TC (ou son analogue si C est de dimension infinie). L'**impulsion** est une forme linéaire p sur l'ensemble des vitesses, i.e. un co-vecteur. L'ensemble des impulsions est donc le fibré cotangent T^*C et s'appelle **espace des phases**.

1.2 Principe de moindre action et équation du mouvement

Le **principe de moindre action** affirme que :

> Pour tout système mécanique il existe une fonctionelle $S[\gamma]$ des courbes sur C, appellée **action**, qui a un minimum dans les trajectoires des configurations.

Autrement dit :

> Un système évolue de la configuration q_1 à la configuration q_2 le long d'une courbe γ qui joigne q_1 à q_2 si et seulement si γ minimise l'action $S[\gamma]$.

En particulier, une telle courbe est un **extremum** de l'action [N.B. cette condition n'est pas suffisante pour assurer que γ soit un minimum de $S[\gamma]$], c'est-à-dire qu'elle annulle la dérivée fonctionelle de S,

$$\frac{\delta S[\gamma]}{\delta\gamma} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} S[\gamma + \varepsilon\ \delta\gamma] \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \tag{1}$$

où $\delta\gamma$ varie parmi les courbes avec extrêmes fixés q_1 et q_2. Cette équation s'appelle **équation du mouvement** du système.

1.3 Lagrangien

L'action $S[\gamma]$ est une intégrale curviligne le long de la courbe γ d'extrèmes q_1 et q_2. L'intégrand est une fonction réelle qui dépend du temps $t \in \mathbb{R}$, des configurations $q \in C$ le long de γ, et de leurs vitesses $v \in T_qC$. Si on paramétrise la courbe par le temps t, on appelle $q(t)$ les configurations le long de γ et t_1, t_2 les deux temps tels que $q(t_1) = q_1$ et $q(t_2) = q_2$, alors la vitesse de déplacement des configurations est donnée par les vecteurs $v(t) = \dot{q}(t)$ tangent à γ, et l'intégrale d'action peut être écrit comme une intégrale sur t.

Un **Lagrangien** sur C est une fonction $L : \mathbb{R} \times TC \longrightarrow \mathbb{R}$, de domaine eventuellement restreint à un sous-ensemble de $\mathbb{R} \times TC$, telle que

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q(t), v(t))\ \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Dans un système mécanique, le Lagrangien est lié à l'énergie du système, et typiquement on a $L = T - V$, où T est l'énergie cynétique et V est l'énergie potentielle du système. À noter que L n'est pas l'énergie totale du système, qui est $H = T + V$.

Un Lagrangien s'appelle **autonome** s'il ne dépend pas explicitement du temps $t \in \mathbb{R}$. Dans ce cas L est une fonction $L : TC \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme $L(q(t), v(t))$ qui dépend implicitement de t. À partir de maintenant, on ne considère que des Lagrangiens autonomes.

1.4 Équation d'Euler-Lagrange

En termes du Lagrangien, l'équation du mouvement (1) s'appelle **équation d'Euler-Lagrange** et devient le système d'équations

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v^i}(q(t),v(t)) - \frac{\partial L}{\partial q^i}(q(t),v(t)) = 0, \qquad i=1,...,m \tag{3}$$

où l'indeterminée est la courbe γ parametrée localement par $q(t)=(q^1(t),...,q^m(t))$, avec extrèmes $q(t_1)=q_1$ et $q(t_2)=q_2$ fixés, et vitesse $v(t)=\dot q(t)=(v^1(t),...,v^m(t))$.

Preuve. Soit $S[\gamma]=\int_{t_1}^{t_2} L(t,q(t),v(t))\mathrm{d}t$ avec $\gamma(t)=q(t)$ et $\gamma'(t)=v(t)$ telle que $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ fixés. Considerons des variations infinitesimales $\delta\gamma$ de la courbe γ qui fixent les extremes, i.e. telles que $\delta\gamma(t_1)=\delta\gamma(t_2)=0$. Alors on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}S[\gamma+\varepsilon\,\delta\gamma]\Big|_{\varepsilon=0} &:= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}+\sum_i\frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big(\gamma^i(t)+\varepsilon\delta\gamma^i(t)\Big)\Big|_{\varepsilon=0}+\sum_i\frac{\partial L}{\partial v^i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big(\dot\gamma^i(t)+\varepsilon\dot{\delta\gamma}^i(t)\Big)\Big|_{\varepsilon=0}\right]\mathrm{d}t\\ &= \sum_i\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^i\partial}\delta\gamma^i(t)+\frac{\partial L}{\partial v^i}\,\dot{\delta\gamma}^i(t)\right)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\sum_i\Big(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v^i}\Big)\delta\gamma^i(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}\tag{4}$$

parce que

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial v^i}\,\dot{\delta\gamma}^i(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\partial L}{\partial v^i}\,\delta\gamma^i(t)\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v^i}\,\delta\gamma^i(t)\,\mathrm{d}t=-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v^i}\,\delta\gamma^i(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a alors que $\dfrac{\delta S[\gamma]}{\delta\gamma}=0$ pour toute variation infinitesimale $\delta\gamma$ si et seulement si $\sum_i\Big(\dfrac{\partial L}{\partial q^i}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial v^i}\Big)=0$. Ceci se vérifie si et seulement si on a $\dfrac{\partial L}{\partial q^i}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial v^i}=0$ pour tout i. En effet, si $\eta_i(t)=\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v^i}$ est une composante non nulle en un $t\in]t_1,t_2[$ quelconque, alors une variation $\delta\gamma$ avec i-ème composante $\delta\gamma^i(t)=\eta_i\big(f(t)\big)$ n'annulle pas l'intégrale (4) si $f\geq 0$ et $f(t_1)=f(t_2)=0$. □

Chaque équation (3) est une équation différentielle du deuxième ordre en $q(t)$:

$$\sum_j\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i\partial v^j}\,\ddot q^j(t)+\frac{\partial^2 L}{\partial v^i\partial q^j}\,\dot q^j(t)\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0, \qquad i=1,...,m,$$

où toutes les dérivées de L sont calculées en $(q(t),\dot q(t))$. Si le Lagrangien est **régulier**, c'est-à-dire que localement on a $\det\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial v^i\partial v^j}\right)\neq 0$, cette équation devient

$$\ddot q^i(t)=F^i(q(t),\dot q(t)), \qquad i=1,...,m,$$

où $F=(F^1,...,F^m)$ est un vecteur défini sur (q,v) par l'identité matricielle

$$F=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i\partial v^j}\right)^{-1}\left[\operatorname{grad}L-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i\partial q^j}\right)\,v\right].$$

1.1 Exercice. Trouver l'équation d'Euler-Lagrange d'une particule de $\mathbb{R}^3$ de masse m dans un champ de force conservative $\vec F=-\mathrm{grad}\ U$: l'action est

$$S[q]=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{2}m\ ||v(t)||^2-U(q(t))\right)\mathrm{d}t.$$

Reponse. FINIR □

1.5 (*) Équations d'Hamilton-Jacobi

Enfin, si pour toute configuration q ayant vitesse v on appelle

– **impulsion** : le vecteur $p\in T_q^*C$ de coordonnées $p_i(q,v)=\dfrac{\partial L(q,v)}{\partial v^i}$, $i=1,...,m$

– **force** : le vecteur f de composantes $f_i(q,v)=\dfrac{\partial L(q,v)}{\partial q^i}$, $i=1,...,m$

– **Hamiltonien** : la fonction réelle $H(q,p)=\sum_i p_i\ v^i(q,p)-L(q,v(q,p))$, où $v=v(q,p)$ est obtenue en inversant la fonction $p=p(q,v)$, alors l'équation d'Euler-Lagrange devient le couple suivant d'équations différentielles du premier ordre en $(q(t), p(t))$:

$$\begin{cases} \dot{q}^i(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p^i}(q(t), p(t)), \\ \dot{p}_i(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}(q(t), p(t)), \end{cases} \qquad i = 1, ..., m, \tag{5}$$

qui s'appellent **équations d'Hamilton-Jacobi**.

L'Hamiltonien H est égal à l'energie totale du systeme, $T+V$. L'interet de la formulation Hamiltonienne de l'équation du mouvement est qu'elle manifeste la structure *symplectique* de l'espace des phases T^*C, auquel appartient le couple $(q(t), p(t))$. Cet aspect des systèmes dynamiques n'est pas traité dans ce cour, voir le cours de V. Ovsienko sur les systèmes intégrables.

1.6 Exemples d'équations d'Euler-Lagrange

1) Géodésiques – lagrangien d'énergie

Lagrangien d'énergie : $L(X) = \dfrac{1}{2}\, g(X, X) = \dfrac{1}{2}\, \sum_{i,j} g_{ij}(X^i, X^j)$
- M = varieté (pseudo-) riemannienne orientable de dimension m avec métrique g
- $X \in \mathfrak{X}(M)$ = champ de vecteurs sur M = section du fibré tangent TM (i.e. $X_x \in T_xM$ pour tout $x \in M$)
- ∇ = connexion de Levi-Civita sur TM (fonction de g)
- $\frac{\nabla}{\mathrm{d}t}$ = transport parallèle induit par ∇,

Équation des géodésiques : $\frac{\nabla \dot{\gamma}(t)}{\mathrm{d}t} = 0$, i.e. $\ddot{x}^i(t) + \sum_{j,k} \Gamma^i_{kj}(\gamma(t))\ \dot{x}^j(t)\ \dot{x}^k(t) = 0$
$\Longrightarrow$ géodésique = trajectore d'un mouvement inertiel

Espace des configurations : $C = M$ varieté (pseudo-) riemannienne orientable de dimension n

2) Géodésiques – lagrangien de longueur

Lagrangien de longueur : $L(X) = \sqrt{\frac{1}{2}\, g(X, X)}$.
- Idem, mais ce Lagrangien est invariant par reparametrisation des courbes. Ceci laisse un degré de liberté : il y a $m-1$ équations d'Euler-Lagrange linéarement independentes qui ne permettent pas de trouver une solution unique.
- Si on ajoute la condition que la vitesse ait module constant ($g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = c$) on obtient comme solution les géodésiques. [Postnikov, p.143-144]

3) Champs de jauge – Yang-Mills (relativité restreinte)

Action de Yang-Mills dans le vide : $S_{YM}[A] = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_M \mathrm{tr}\,(F \wedge \star F)$
- $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ espace-temps = varieté de Minkowski avec métrique $\eta = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$
- $P = P(\mathbb{M}, G)$ = fibré principal sur $\mathbb{M}$ de groupe G et algèbre de Lie $\mathfrak{g}$
- $d : \Omega^q(\mathbb{M}) \longrightarrow \Omega^{q+1}(\mathbb{M})$ = différentielle de de Rham
- $\star : \Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^{4-q}(M)$ = operateur de Hodge
- $\delta = \star\ \mathrm{d}\star : \Omega^q(\mathbb{M}) \longrightarrow \Omega^{q-1}(\mathbb{M})$ = application de bord d'homologie
- $\mathrm{tr}\ : \Omega^4(\mathbb{M}; \mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^4(\mathbb{M})$ = trace
- $\nabla = \nabla_0 + A$ = connexion principale sur P, avec ∇_0 plate
- $A \in \Omega^1(\mathbb{M}; \mathfrak{g})$ = potentiel vecteur
- $F = \mathrm{d}A + A \wedge A \in \Omega^1(\mathbb{M}; \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*)$ = courbure de ∇

Groupe de jauge : $\mathrm{Aut}^G_{\mathbb{M}}(P) \cong C^\infty(P, G)$
Identité de Bianchi : $\mathrm{d}F = 0$
Équation de Yang-Mills dans le vide : $\delta F = 0$ i.e. $\mathrm{d}(\star F) = 0$

- $J = \rho \mathrm{d}t - \vec{J} \cdot \mathrm{d}r \in \Omega^1(\mathbb{M})$ champ source extérieure (densité de charge ρ et densité de courant $\vec{J}$)

Équation de Yang-Mills : $\delta F = J$
Équation de continuité : $0 = \delta^2 F = \delta J = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}\right)$

Espace des configurations : $C = \{$ connexions principales sur un fibré principal $\}$

4) Champ éléctromagnétique – Maxwell

Action de l'éléctromagnétisme = Yang-Mills avec $G = U(1)$: $S_{Maxwell}[A] = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_M F \wedge \star F$
- $\mathfrak{u}(1) = \mathbb{R}$, donc $A \in \Omega^1(\mathbb{M})$ et $A \wedge A = 0$
- $\mathfrak{u}(1) \otimes \mathfrak{u}(1)^* = \mathbb{R}$, donc $F = \mathrm{d}A \in \Omega^2(\mathbb{M})$

Équations de Maxwell I : $\mathrm{d}F = 0$
Équation de Maxwell II : $\delta F = J$ (dans le vide : $\mathrm{d} \star F = 0$)

5) Métrique – Hilbert-Einstein (relativité générale)

Action de Hilbert-Einstein dans le vide : $S_{HE}[g] = \int_M R \ \mathrm{vol} \ = \int_M R\sqrt{|\det g|}\mathrm{d}^m x$

- M = varieté de dimension m orientable
- $g \in \Gamma(M, T^*M \vee T^*M)$ = métrique pseudo-Riemanienne
- $\mathrm{vol} \in \Omega^m(M)$ = forme volume
- ∇ = connexion de Levi-Civita sur TM
- D_∇ = dérivée extérieure covariante détérminée par ∇
- $\mathcal{R} = R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ = tenseur de courbure de Riemann
- $R_{\alpha\beta} = R^\gamma_{\alpha\gamma\beta}$ = tenseur de courbure de Ricci
- $R = R^\alpha_\alpha = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ = courbure scalaire de Ricci (où $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$)

Identité de Bianchi : $D_\nabla \mathcal{R} = 0$, i.e. $\nabla_{[\alpha} R^\lambda_{\beta\gamma]\delta} = 0$
Équation d'Einstein dans le vide : $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \ R \ g_{\alpha\beta} = 0$ i.e. $R_{\mu\nu} = 0$
$\Longrightarrow$ solution de Schwarzschild (à symmétrie sphérique) = champ gravitationnel d'une masse ponctuelle

- $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \ R \ g_{\alpha\beta}$ = tenseur de Einstein
- $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ = tenseur énergie-impulsion (dependant d'une source extérieure J)
- $\kappa = 8\pi \ G \ c^{-4} \sim 6,67 \ 10^{-11} Nm^2/Kg$ = constante gravitationnelle de Newton

Équation d'Einstein : $G_{\mu\nu} = 8\pi \ \kappa \ T_{\mu\nu}$, i.e. $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \ R \ g_{\alpha\beta} = 8\pi \ \kappa \ T_{\mu\nu}$
Conservation de l'énergie-impulsion : $g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda T_{\mu\nu} = 0$ (divergence nulle)
$\Longleftrightarrow$ energie : $\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{i0}}{\partial x^i} = 0$, impulsion : $\frac{\partial T^{0j}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} = 0$

Espace des configurations : $C = \{$ métriques (pseudo-) Riemaniennes $\} \equiv \{$ connexions de Levi-Civita $\}$

6) Champ gravitationnel – Palatini

Action de Palatini dans le vide : $S_{Palatini}[e] = \frac{1}{2} \int_M \varepsilon \ (\tilde{R}[e] \wedge e \wedge e) \quad = S_{HE}[g]$ avec $R \, \mathrm{vol} = \varepsilon \ (\tilde{R}[e] \wedge e \wedge e)$

- M espace-temps = varieté orientable de dimension 4
- $FM(M, SO(1,3))$ fibré des repères = fibré principal de groupe structural $SO(1,3) \subset GL^+(4)$
- $E(M, \mathbb{M}, SO(1,3))$ = fibré associé à FM de fibre $\mathbb{M}$ (varieté de Minkowski) et groupe structural $SO(1,3)$
- $\nabla = \nabla_0 + e$ = connexion sur E, avec ∇_0 plate
- $e \in \Omega^1(M; E)$ tetrad = champ gravitationnel = morphisme de fibrés $e : TM \longrightarrow E$
- $g[e] \in \Gamma(M, T^*M \vee T^*M)$ = métrique pseudo-riemannienne telle que $g[e](X,Y) = \eta(e(X), e(Y))$ pour $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
- $\omega[e] \in \Omega^1(M; \mathfrak{so}(1,3))$ connexion spin = connexion sur FM a torsion nulle, i.e. $T = D_{\omega[e]} e = \mathrm{d}e + \omega[e] \wedge e = 0$
- $\tilde{R}[e] = D_{\omega[e]} \omega[e] = \mathrm{d}\omega[e] + \omega[e] \wedge \omega[e] \in \Omega^2(M; \mathrm{End}\, \mathfrak{so}(1,3))$ = courbure
- ε = symbol antisymmétrique de Levi-Civita = 0 ou ± 1

Équation d'Einstein dans le vide : $\varepsilon \ (\tilde{R}[e] \wedge e) = 0$

Espace des configurations : $C = \{$ connexions d'un fibré de fibre $\mathbb{M}$ associé au fibré principal des repères $\}$

Conclusion

Pour comprendre les champs de jauge nous avons besoin de :

- varietés différentiables, orientables et pseudo-riemaniennes ;
- calcul différentiel et intégrale sur les varietés ;
- varietés avec action d'un groupe de Lie, fibrés principaux et fibrés associées ;
- connexions et courbures sur les fibrés.

2 Varietés différentiables

2.1 (*) Rappels de topologie

2.1 Definition. Un **espace topologique** est un ensemble M muni d'une famille de sous-ensembles de M, appellés **ouverts**, telle que :

1. l'ensemble vide $\emptyset$ et M sont des ouverts ;
2. l'intersection $\cap_r U_r$ d'un nombre fini d'ouverts est un ensemble ouvert ;
3. l'union $\cup_r U_r$ d'ouverts est un ensemble ouvert.

La famille d'ensembles choisis comme ouverts s'appelle **topologie** de M. Un ensemble s'appelle **fermé** si son complément est ouvert. (En particulier, $\emptyset$ et M sont au même temps ouverts et fermés.)

2.2 Definition. Un ensemble ouvert contenant un point $x \in M$ s'appelle **voisinage** de M. Un espace topologique M est **de Hausdorff**, ou **separé**, si pour tous les points distincts x et y de M il existe des voisinages U_x et U_y qui ne s'intersectent pas, i.e. $U_x \cap U_y = \emptyset$.

2.3 Definition. Une collection d'ouverts d'un espace topologique M est un **recouvrement** si leur union est M.

Si $\{U_r\}$ est un recouvrement de M, un **sous-recouvrement** de $\{U_r\}$ est la collection d'un sous-ensemble d'ouverts U_r qui reste un recouvrement. Un **raffinement** de $\{U_r\}$ est un recouvrement $\{V_s\}$ tel que chaque ouvert V_s est contenu dans un ouvert U_r. Un recouvrement est **localement fini** si tout point est contenu dans un nombre fini d'ouverts du recouvrement.

Un espace topologique M est **compact** s'il est de Hausdorff et tout recouvrement admet un sous-recouvrement fini. L'espace M est **paracompact** s'il est de Hausdorff et tout recouvrement admet un raffinement localement fini. Il est **à base denombrable** s'il existe un recouvrement contenant un nombre denombrable d'ouverts. Dans ce cas, tous les recouvrements admettent un raffinement localement compact. Donc un espace de Hausdorff et à base denombrable est paracompact.

2.4 Definition. Une application $\phi : M \longrightarrow N$ entre deux espaces topologiques est **continue** si pour tout ouvert $V \subset Y$ l'image réciproque $\phi^{-1}(V) \subset M$ est un ouvert. Une application continue $\phi : M \longrightarrow N$ est un **homéomorphisme** si en plus elle est inversible et sa réciproque $\phi^{-1} : N \longrightarrow M$ est aussi continue.

2.2 Varietés différentiables

Soit M un espace topologique.

2.5 Definition. Une **carte** ou **carte locale** sur M est un homéomorphisme d'un ouvert de M vers un ouvert de $\mathbb{R}^m$, c'est-à-dire un couple (U, φ) où U est un ouvert de M, $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est un homéomorphisme, et l'image $V = \varphi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Si $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $\varphi' : U' \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sont deux cartes et $U \cap U' \neq \emptyset$, l'application $\psi = \varphi' \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ s'appelle **changement de carte**. C'est évidemment un homéomorphisme de $\varphi(U \cap U')$ vers $\varphi'(U \cap U')$.

2.6 Definition. On appelle **varieté différentiable de dimension** m un espace topologique M muni d'une famille de cartes $\mathcal{A} = \{\varphi_r : U_r \longrightarrow \mathbb{R}^m\}$ telle que

1. l'ensemble $\{U_r\}$ est un recouvrement de M ;
2. les changement de cartes $\psi_{rs} = \varphi_s \circ \varphi_r^{-1}$ sont des difféomorphismes (i.e. des applications réelles inversibles, différentiables et avec réciproque différentiable) ;
3. la famille est **maximale**, c'est-à-dire qu'elle contient toutes les cartes compatibles entre elles (dans le sense que les changement de cartes sont des difféomorphismes).

Une telle famille s'appelle **atlas (maximale)** sur M.

Une varieté M s'appelle **différentiable de classe** C^k, ou **de classe** C^∞ **(lisse)**, si les changements de cartes ψ_{rs} sont des difféomorphismes de classe C^k (i.e. différentiables k fois avec dernière dérivée continue et leurs reciproques aussi), ou bien de classe C^∞ (i.e. différentiables autant de fois qu'on veut ainsi que leurs reciproques).

Normalement on suppose qu'une varieté différentiable soit un espace **de Hausdorff**, ce qui garantit que la limite d'une suite convergente soit unique, et **à base denombrable d'ouverts** (et donc **paracompact**), ce qui garantit l'existence d'une partition de l'unité.

2.7 Definition. Une **paramétrisation locale** de M autour d'un point x_0 est un homéomorphisme $f : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow U$, où V est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et U est un voisinage de x_0 qui est parametré par f, i.e.

$$U = \{x = f(x^1, ..., x^m) \in M,\ (x^1, ..., x^m) \in V \subset \mathbb{R}^m\}.$$

2.8 Definition. [**alternative**] Une varieté différentiable peut être définie comme un espace topologique M muni d'une famille de paramétrisations locales $f_r : V_r \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M$, où V_r sont des ouverts de $\mathbb{R}^m$, telles que

1. $\{f_r(V_r)\}$ soit un recouvrement de M ;
2. si $f_r(V_r) \cap f_s(V_s) = W$ est un sous-ensemble non vide de M, alors les ensembles $f_r^{-1}(W)$ et $f_s^{-1}(W)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et l'application $f_s^{-1} \circ f_r : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est un difféomorphisme de classe C^∞.

Par conséquent, pour tout $x_0 \in M$ il existe un voisinage U_{r_0} dans M qui est parametré par une application f_{r_0}, i.e. $U_{r_0} = \{x = f_{r_0}(x^1, ..., x^m),\ (x^1, ..., x^m) \in V_{r_0} \subset \mathbb{R}^m\}$.

En particulier, **une surface parametrée S de $\mathbb{R}^3$ est une varieté différentiable avec une seule carte globale** : la réciproque $\varphi = f^{-1} : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la paramétrisation f de S.

Preuve. Les deux définitions sont équivalentes, car les paramétrisations locales sont les applications réciproques des cartes, i.e. $f_r = \varphi_r^{-1}$ et $V_r = \varphi_r(U_r)$, ou bien $U_r = f_r(V_r)$. Les changement de cartes ψ_{rs} sont exactement les composées $f_s^{-1} \circ f_r$. □

2.9 Remarque. Au contraire, un espace topologique M doté d'un atlas de cartes dont les changement de cartes sont des simples homéomorphismes s'appelle **varieté topologique**.

2.3 Exemples et exercices

2.10 Proposition. *Toute surface regulière de $\mathbb{R}^3$ définie implicitement est une varieté différentiable de dimension* 2.

En particulier, toute surface algébrique regulière est une varieté différentiable.

Preuve. En effet, supposons que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ F(x, y, z) = 0\}$, ou $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction avec $dF \neq 0$ sur S. Par le théorème des fonctions implicites, localement, autour de tout point $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$, on peut inverser F et trouver z comme fonction $z(x, y)$ de $(x, y) \in V$, où V est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant (x_0, y_0). On défini ainsi des paramétrisations locales regulières de S : des applications lisses $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x, y, z(x, y))$ telles que $p \in S$ ssi $p = f(x, y)$ pour (x, y) dans un ouvert $V \subset \mathbb{R}^2$. Leurs réciproques $\varphi = f^{-1}$ définissent alors un système de cartes sur S, $\varphi : U = f^{-1}(V) \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^2$. □

2.11 Exercice. Le **cercle** $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ est une varieté de dimension 1. Trouver deux cartes locales qui le couvrent.

Reponse. Exo. □

2.12 Proposition. *Le produit $M \times N$ de deux varietés de dimension m et n est une varieté de dimension $m + n$.*

Par exemple : le **cylindre** $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et le **tore** $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Preuve. Exo. □

2.13 Exercice. La **sphère** $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ est une varieté lisse de dimension 2. Combient de cartes locales faut-il au minimum pour la couvrir ?

Reponse. Deux. Il suffit de prendre les deux projections stéréographiques $\varphi_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow T_S\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{R}^2$ et $\varphi_S : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \longrightarrow T_N\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{R}^2$, où N et S denotent respectivement le pôle nord et le pôle sud, et $T_S\mathbb{S}^2$ et $T_N\mathbb{S}^2$ denotent respectivement le plan tangent à $\mathbb{S}^2$ au pôle sud et au pôle nord. □

2.14 Exemple. Le **plan projectif réel** est le quotient $P^2(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}_{/\sim}$ par la relation d'équivalence

$$(x, y, z) \quad \sim \quad (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0.$$

On indique avec $[x; y; z]$ le point de $P^2(\mathbb{R})$ contenant (x, y, z). Demontrer que $P^2(\mathbb{R})$ est une varieté de dimension 2, en trouvant un recouvrement à trois cartes locales d'ouverts $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$.

Reponse. Exo. □

2.15 Exemple. La **bande de Möbius** est la surface définie comme suit. On considère $\mathbb{R}^3$ avec coordonées (x, y, z), et un grand cercle centré en l'origine O et de rayon a sur le plan xOy. En chaque point C de ce cercle on prend une droite contenue dans le plan parallèle à xOz qui tourne dans cet espace au fur et à mesure que le point C parcour le grand cercle. La bande de Möbius est l'ensemble M des points P qui se trouvent sur ces droites.

On peut realiser M comme varieté avec deux parametrisations locales, données par la restriction à deux ouverts $V_1 =]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ et $V_2 =]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}$ de l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(\alpha, h) = \Big(a \cos\alpha(1 + h\cos(\alpha/2)), a \sin\alpha(1 + h\cos(\alpha/2)), h \sin(\alpha/2)\Big),$$

qui verifie $f(\alpha, h) = f(\alpha + 2\pi, -h)$ et donc est globalement mal définie.

La bande de Möbius est aussi connue comme le quotient

$$M \cong \big(\mathbb{R} \times \mathbb{R}\big)_{/(\alpha,h)\sim(\alpha+2\pi,-h)} \quad \equiv \quad \big([0, 2\pi] \times \mathbb{R}\big)_{/(0,h)\sim(2\pi,-h)}.$$

Cela revient à identifier M avec l'image de la reciproque du difféomorphisme induit sur le quotient par l'application f.

2.16 Exercice. La **bouteille de Klein** est la surface définie comme suit. On considère $\mathbb{R}^4$ avec coordonées (x, y, z, w), et un grand cercle centré en l'origine O et de rayon a sur le plan xOy. En chaque point C de ce cercle on centre un petit cercle de rayon $b < a$ qui tourne dans l'espace à trois dimensions $OCzw$ au fur et à mesure que le point C parcour le grand cercle. La bouteille de Klein est l'ensemble K des points P qui se trouvent sur le petit cercle.

Considerons l'ouvert $V_1 = \{(\alpha, \beta) \in]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\}$ de $\mathbb{R}^2$, où α est l'angle compri entre l'axe Ox et l'axe OC, et β est l'angle centré en C et compri entre la prolongation de l'axe OC sortant de C vers l'extérieur et le point P du petit cercle. Le difféomorphisme $f_1 : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ défini par $f_1(\alpha, \beta) = (x, y, z, w)$ avec

$$\begin{aligned} x &= (b \cos\beta + a) \cos\alpha \\ y &= (b \cos\beta + a) \sin\alpha \\ z &= b \sin\beta \cos(\alpha/2) \\ w &= b \sin\beta \sin(\alpha/2) \end{aligned}$$

a comme image la bouteille de Klein moins les points qui se trouvent sur les deux semi-axes $\{\alpha = 0\}$ et $\{\beta = 0\}$. C'est donc une paramétrisation locale de K.

Trouver deux autres parametrisations locales f_2 et f_3 qui permettent de couvrir la bouteille de Klein, en changeant l'origine des deux angles. Par exemple une avec $\bar{\alpha} = \pi/2 - \alpha$ qui couvre l'axe $\{\alpha = 0\}$ et une avec $\bar{\beta} = \pi - \beta$ qui couvre l'axe $\{\beta = 0\}$.

Reponse. On pose $V_2 = \{(\bar{\alpha}, \beta) \in]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\}$ et $f_2(\bar{\alpha}, \beta) = (x, y, z, w)$ avec

$$\begin{aligned} x &= -(b \cos\beta + a) \sin\bar{\alpha} \\ y &= (b \cos\beta + a) \cos\bar{\alpha} \\ z &= b \sin\beta \cos(\bar{\alpha}/2 + \pi/4) \\ w &= b \sin\beta \sin(\bar{\alpha}/2 + \pi/4) \end{aligned}$$

et $V_3 = \{(\alpha, \bar{\beta}) \in]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\}$ et $f_3(\alpha, \bar{\beta}) = (x, y, z, w)$ avec

$$\begin{aligned} x &= (-b \cos\bar{\beta} + a) \cos\alpha \\ y &= (-b \cos\bar{\beta} + a) \sin\alpha \\ z &= b \sin\bar{\beta} \cos(\alpha/2) \\ w &= b \sin\bar{\beta} \sin(\alpha/2). \end{aligned}$$

□

2.4 Applications différentiables et difféomorphismes

Soient M et N deux varietés différentiables de dimension m et n.

2.17 Definition. Pour toute application $\phi : M \longrightarrow N$, on appelle **expression locale** de ϕ dans les cartes $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de M et $\varphi' : U' \subset f(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de N la composée $\tilde{\phi} = \varphi' \circ \phi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Une application $\phi : M \longrightarrow N$ est **différentiable**, ou **de classe** C^k, ou **de classe** C^∞ **(lisse)**, si pour toute carte sur M et toute carte sur N l'expression locale $\tilde{\phi}$ est différentiable au sens des fonctions réelles, ou de classe C^k, ou de classe C^∞. L'ensemble des applications de classe C^k est denoté $C^k(M, N)$, celui des applications de classe C^∞ est denoté $C^\infty(M, N)$.

2.18 Definition. Une application $\phi : M \longrightarrow N$ est un **difféomorphisme** si elle est différentiable, inversible et avec réciproque différentiable. Cela signifie que l'application ϕ est un homéomorphisme qui, localement, est une application réelle $\tilde{\phi}$ avec différentielle $\mathrm{d}\tilde{\phi}$ inversible, c'est-à-dire une matrice carrée de détérminant non nul. Dans ce cas, on dit aussi que les deux varietés M et N sont **difféomorphes**. Elles ont donc la même dimension, $m = n$. On note $\mathrm{Diff}\,(M, N)$ l'ensemble des difféomorphismes de M vers N.

2.19 Proposition. *L'ensemble des difféomorphismes de M est un groupe avec la composition.* On le note $\mathrm{Diff}\,(M)$.

Preuve. La composée de deux difféomorphismes est encore un difféomorphisme, ainsi que la réciproque et l'identité $\mathrm{id} : M \longrightarrow M$. Détails : exo. □

2.5 Fonctions réelles sur une varieté

Soit M une varieté de dimension m. On note $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions réelles de classe C^∞ sur M.

2.20 Proposition. *L'ensemble $C^\infty(M)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (de dimension infinie) et une algèbre associative et commutative avec le produit usuel $(f\ g)(x) = f(x)\ g(x)$, où $f, g \in C^\infty(M)$ et $x \in M$.*

2.21 Definition. Si $\{(U_r, \varphi_r)\}$ est un atlas de M, on appelle **fonctions coordonnées** ou **coordonnées locales** les fonctions $x^i : U_r \longrightarrow \mathbb{R}$ définies en tout point $x \in U_r$ comme

$$x^i(x) := \pi^i \circ \varphi(x), \qquad i = 1, ..., m,$$

où $\pi^i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ est la projection sur la i-ème composante. On a alors $\varphi(x) = (x^1(x), ..., x^m(x))$.

Évidemment, en tout point $x \in M$ les coordonnées locales x^i autour de x dependent de la carte φ choisie.

2.22 Proposition. *Les coordonnées locales x^i sont des fonctions (locales) de classe C^∞ sur M.*

Preuve. Une fonction f sur M (ou sur tout ouvert de M) est de classe C^∞ si elle l'est une fois lue à travers toute carte de M qui intersecte son support. Pour tout $x \in M$, et ayant fixé la carte φ pour définir x^i, choisissons alors une autre carte $\varphi' : U' \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que U' contient x, et appellons $\varphi'(x) = (y^1, ..., y^m)$ les nouvelles coordonnées locales. Soit $W = U \cup U'$, et considerons x^i et φ' restreintes à W. La fonction x^i, dans la carte φ', devient alors la fonction réelle $\tilde{x}^i := x^i \circ (\varphi')^{-1}$. Celle-ci est de classe C^∞, car

$$\tilde{x}^i = x^i \circ (\varphi')^{-1} = \pi^i \circ \varphi \circ (\varphi')^{-1} = \pi^i \circ \psi,$$

où ψ est le changement de carte, qui est de classe C^∞, et la projection π^i l'est évidemment aussi. $\square$

2.23 Remarque. Les coordonnées locales x^i engendrent un **faiseau** de sous-algébres de $C^\infty(M)$, que l'on appelle **anneaux locaux de polynômes** sur M.

2.24 Definition. Si $\phi : M \longrightarrow N$ est une application différentiable, on appelle **pull back de** f l'application

$$\phi^* : C^\infty(N) \longrightarrow C^\infty(M), \quad f \mapsto \phi^* f := f \circ \phi.$$

Le foncteur C^∞ des varietés différentiables aux algèbres associatives commutatives est donc contravariant.

2.6 Courbes parametrées sur une varieté

2.25 Definition. Une **courbe paramétrée** sur M est une application $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$, de domaine $I \subset \mathbb{R}$. Son expression locale dans une carte $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et la courbe $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, avec $\tilde{\gamma}(t) = (\tilde{\gamma}^1(t), ..., \tilde{\gamma}^m(t)) = (x^1(t), ..., x^m(t))$.

La courbe γ est **regulière en** $t \in I$, ou en $x = \gamma(t) \in M$, si pour toute carte $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que U contient le point P, son expression locale $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ est une courbe regulière en t, i.e. $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}t}(t) \neq \vec{0}$. On dit que γ est **regulière** si elle est regulière en tout $t \in I$.

Si γ est une courbe regulière en x, on peut toujours changer sa paramétrisation pour avoir $\gamma(0) = x$. Localement, autour de x, on peut aussi choisir une carte φ telle que $\varphi(x) = (0, ..., 0) \equiv \vec{0} \in \mathbb{R}^m$. On peut donc toujours avoir une courbe locale $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ regulière en $\tilde{\gamma}(0) = \vec{0}$.

2.26 Remarque. La *vitesse* d'une courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ au point $x = \gamma(0)$ où elle est regulière devrait être un *vecteur* $\gamma'(0)$ *tangent* à la courbe en P. Mais on ne connait pas l'espace ambient où ce vecteur pourrait être définit. Nous allons le définir de façon indirecte, en utilisant ses proprietés comme *opérateur agissant sur les fonctions différentiables.*

Pour cela, considerons une fonction différentiable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ et suivons sa valeur le long de la courbe γ : nous avons donc une fonction réelle $f \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour tout choix d'une carte $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ autour de x on a alors

$$f \circ \gamma = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma = \tilde{f} \circ \tilde{\gamma},$$

où $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ et $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ sont l'expression de f et γ en coordonnées locales autour de x, c'est-à-dire des fonctions réelles. Si pour tout point x' autour de x on appelle $(x^1, ..., x^m) = \varphi(x')$ ses coordonnées locales dans cette carte, on a $\tilde{\gamma}(t) = (\tilde{\gamma}^1(t), ..., \tilde{\gamma}^m(t))$, avec $\tilde{\gamma}^i(t) = x^i(t)$. On peut alors dériver $\tilde{\gamma}(t)$ et $(\tilde{f} \circ \tilde{\gamma})(t)$ de façon usuelle par rapport à t, en utilisant la règle de la chaîne. En calculant les dérivées en $t = 0$, en sachant que $\tilde{\gamma}(0) = \varphi(x)$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{\mathrm{d}(\tilde{f} \circ \tilde{\gamma})}{\mathrm{d}t}(0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}\big(\tilde{\gamma}(0)\big)\ \frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}^i(0)}{\mathrm{d}t} = \left(\sum_{i=1}^m \dot{x}^i(0)\ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(x)} \right) \tilde{f}.$$

On voit alors que **en coordonnées locales, la dérivée de** $f \circ \gamma$ **en** $t = 0$ **peut être interpretée comme un opérateur différentiel dependant seulement de** γ **et agissant sur** $\tilde{f}$. Cela peut être enoncé independement des coordonnées locales, et motive la définition suivante.

2.27 Definition. Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe regulière en $t = 0$, et $C^\infty(x)$ l'ensemble des fonctions reélles sur M qui sont différentiables de classe C^∞ en $x = \gamma(0)$. Le **vecteur tangent à** γ **en** $\gamma(0)$ est l'application $\gamma'(0) : C^\infty(x) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\gamma'(0)\, f := \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}(0), \qquad f \in C^\infty(x).$$

En coordonnées locales $(x^1, ..., x^m)$ autour de $\gamma(0) = x$ on a donc

$$\gamma'(0) = \sum_{i=1}^m \dot{x}^i(0)\ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x, \qquad \text{où} \qquad \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x := \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(x)}.$$

2.7 Espace tangent

2.28 Definition. Un **vecteur tangent à** M **en un point** x est le vecteur tangent à une courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ au point $\gamma(0) = x$ (où elle est regulière). On appelle **espace tangent à** M **en** x l'ensemble T_xM des vecteurs tangent à M en x, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs tangents en x à toutes les courbes sur M qui passent par x et y sont regulières.

2.29 Proposition. *L'espace tangent T_xM est un espace vectoriel réel.*

Autrement dit, pour tout $X_x, Y_x \in T_xM$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la combinaison $\alpha\ X_x + \beta\ Y_x$ est encore un vecteur tangent à M en x, c'est-à-dire qu'il existe une courbe regulière γ telle que $\gamma(0) = x$ et $\alpha\ X_x + \beta\ Y_x = \gamma'(0)$.

Preuve. Si X_x et Y_x sont deux vecteurs tangent à M en x, il existe deux courbes γ_1 et γ_2 sur M, qu'on peut supposer être parametrées par le même paramètre t, qui sont regulières en $x = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et telles que $X_x = \gamma_1'(0)$ et $Y_x = \gamma_2'(0)$. Montrons qu'il existe une courbe γ telle que $\alpha\ X_x + \beta\ Y_x = \gamma'(0)$. [Attention : la combinaison $\alpha\ \gamma_1 + \beta\ \gamma_2$ n'est pas bien définie sur M !]

Choisissons une carte φ autour de x telle que $\varphi(x) = \vec{0}$, et appellons $(x^1, ..., x^m)$ les coordonnes locales. Soient $\tilde{\gamma}_1 = \varphi \circ \gamma_1$ et $\tilde{\gamma}_2 = \varphi \circ \gamma_2$ les courbes γ_1 et γ_2 en coordonnées locales, avec $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0) = \vec{0}$. Alors $\tilde{\gamma} = \alpha\ \tilde{\gamma}_1 + \beta\ \tilde{\gamma}_2$ est une courbe de $\mathbb{R}^n$ bien définie autour de $t = 0$ et telle que $\tilde{\gamma}(0) = \vec{0}$.

Soit $\gamma = \varphi^{-1} \circ \tilde{\gamma}$ le relevement de $\tilde{\gamma}$ à M, défini dans un ouvert de x et tel que $\gamma(0) = \varphi^{-1}(\tilde{\gamma}(0)) = \varphi^{-1}(\vec{0}) = x$. Alors γ est la courbe qu'on cherche, car son expression en coordonnées locales donne

$$\gamma'(0) = \sum_{i=1}^m \dot{\tilde{\gamma}}^i(0)\ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\vec{0}} = \sum_{i=1}^m \Big(\alpha\ \dot{\tilde{\gamma}}_1^i(0) + \beta\ \dot{\tilde{\gamma}}_2^i(0)\Big)\ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\vec{0}} = \alpha\ \gamma_1'(0) + \beta\ \gamma_2'(0) = \alpha\ X_x + \beta\ Y_x.$$

□

2.30 Proposition. *L'espace tangent T_xM est un espace vectoriel de dimension m et l'ensemble $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x,\ i = 1..., m \right\}$ forme une base de T_xM en coordonnées locales.*

Par conséquent, tout vecteur tangent à M en x est de la forme

$$X_x = \sum_{i=1}^m X^i(x)\ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x, \qquad \text{où} \qquad X^i(x) \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Montrer d'abord que toute courbe $\gamma : I \longrightarrow M$ telle que $\gamma(0) = x$ est localement (autour de x) une combinaison des courbes $\gamma_i(t) = \varphi^{-1}(0, ..., t, ..., 0)$ qui font varier seulement la i-ème coordonnée locale.

Ensuite, on a évidemment $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x = \gamma_i'(0)$. Détails : exo. □

2.8 Vecteurs tangents et dérivations

2.31 Definition. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}$ un A-bimodule. Une **dérivation sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathcal{M}$** est une application $D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}$ telle que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{A}$, on a :

- $D(\alpha\ f + \beta\ g) = \alpha\ D(f) + \beta\ D(g)$, i.e. D est linéaire sur $\mathbb{R}$;
- $D(f\ g) = D(f)\ g + f\ D(g)$, i.e. D satisfait la règle de Leibniz.

Si $\mathcal{A}$ a une unité 1 (et donc $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{A}$), on a aussi

- $D(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \subset \mathcal{A}$ $\big[$car $D(\lambda) = \lambda D(1\ 1) = \lambda D(1)\ 1 + \lambda\ 1\ D(1) = 2\ D(\lambda)\big]$.

On indique avec $\mathrm{Der}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ l'ensemble de telles dérivations.

2.32 Proposition. *L'ensemble* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ *est un espace vectoriel réel.*

Autrement dit, pour tout $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la combinaison linéaire $\alpha\ D_1 + \beta\ D_2$ est définie par

$$(\alpha\ D_1 + \beta\ D_2)(f) := \alpha\ D_1(f) + \beta\ D_2(f).$$

Soit $C^\infty(x)$ l'algèbre des fonctions reélles sur M qui sont C^∞ en x. Considerons $\mathbb{R}$ comme bimodule sur $C^\infty(x)$ avec l'action d'**évaluation en un point** $f \cdot \lambda := f(x)\lambda$ pour tout $f \in C^\infty(x)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.33 Proposition. *L'espace tangent à M en x est isomorphe à l'espace vectoriel des dérivations sur $C^\infty(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire*

$$T_xM \cong \mathrm{Der}(C^\infty(x), \mathbb{R}).$$

Preuve. Un élément de T_xM est un vecteur $\gamma'(0)$ tangent à une courbe γ qui passe par x à l'instant $t=0$. Celui-ci est une dérivation sur $C^\infty(x)$, comme on a déja vu.
Le contraire est aussi vrai : toute dérivation sur $C^\infty(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est le vecteur tangent à une courbe en un point régulier. Pour montrer ceci, d'aprés la Proposition (2.30), il suffit de demontrer que toute dérivation sur $C^\infty(x)$ est une combinaison linéaire des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x$, où $(x^1,...,x^m)$ sont les coordonnées locales autour de x.
Soit D une dérivation sur $C^\infty(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'action de D sur $f\in C^\infty(x)$ doit être lue en coordonnées locales : soit U un voisinage de x qui supporte une carte locale $\varphi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$, supposons que $\varphi(x) = (0,...,0) \equiv 0$, appellons $(x^1,...,x^m)$ les coordonnées des points voisins à x dans U et $\tilde f = f\circ\varphi^{-1}$ l'expression de f en coordonnées locales. Alors par Df on entend $D\tilde f$.
Calculons la valeur de $D\tilde f$ en utilisant le développement de Taylor à l'ordre 1 de $\tilde f$ autour de 0 :

$$\tilde f(x^1,...,x^m) = \tilde f(0) + \sum_{i=1}^m x^i \,\frac{\partial \tilde f(0)}{\partial x^i} + \sum_{i,j=1}^m x^i x^j \,\frac{\partial^2 \tilde f(v)}{\partial x^i \partial x^j},$$

où v est un point de V qui se trouve dans le disque centré en 0 de rayon $\|(x^1,...,x^m)\|$. En utilisant le fait que la dérivation D s'annulle sur les constantes, on a alors

$$D\tilde f = \sum_{i=1}^m Dx^i \,\frac{\partial \tilde f(\vec 0)}{\partial x^i} + 2\sum_{i,j=1}^m x^i(0) Dx^j \,\frac{\partial^2 \tilde f(\vec y)}{\partial x^i \partial x^j},$$

où $x^i(0)Dx^j = x^i\cdot Dx^j$ est l'expression en coordonnées locales de l'action de $\mathbb{C}^\infty(x)$ sur $\mathbb{R}$. Puisque $x^i(0)=0$ par hypothèse (car $\varphi(x)=0$), on en conclue que

$$D\tilde f = \sum_{i=1}^m Dx^i \,\frac{\partial \tilde f(\vec 0)}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^m Dx^i \,\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x \tilde f.$$

□

Par conséquent, tout vecteur tangent $X_x \in T_xM$ est identifié à une dérivation sur $C^\infty(x)$ qui agit comme $f\mapsto X_xf$.

2.9 Différentielle d'une application

Soient M et N deux varietés différentiables de dimension m et n, et $\phi : M \longrightarrow N$ une application différentiable.

2.34 Definition. Pour tout $x\in M$, la **différentielle de** ϕ **en** x est l'application linéaire $\mathrm{d}\phi_x : T_xM \longrightarrow T_{\phi(x)}N$ définie sur tout vecteur $X_x = \gamma'(0)$ tangent à la courbe γ sur M en $x=\gamma(0)$ comme le vecteur

$$\mathrm{d}\phi_x(\gamma'(0)) := (\phi\circ\gamma)'(0).$$

Si on interprète les vecteurs tangents comme des dérivations, la différentielle de ϕ en x peut être définie comme

$$\mathrm{d}\phi_x(X_x)f := X_x(f\circ\phi), \qquad \text{pour tout } f\in C^\infty(\phi(x)).$$

Si on fixe des coordonnées locales $(x^1,...,x^m)$ autour de x, et des coordonnées locales $(y^1,...,y^n)$ autour de $\phi(x)$, on a $\widetilde{\phi\circ\gamma}(t) = \tilde\phi\circ\tilde\gamma(t) = \tilde\phi(x^1(t),...,x^m(t)) = (y^1(t),...,y^n(t))$, avec $y^j = y^j(x^1,...,x^m)$ pour tout $j=1,...,n$. Pour tout $X_x = \sum_{i=1}^m X^i(x)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x$, avec $X^i(x) = \frac{\mathrm{d}\tilde\gamma^i}{\mathrm{d}t}(0)$, on a donc

$$\mathrm{d}\phi_x(X_x) = \sum_{j=1}^n \frac{\mathrm{d}(\widetilde{\phi\circ\gamma})^j}{\mathrm{d}t}(0)\,\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{\phi(x)} = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m \frac{\partial\tilde\phi^j(\varphi(x))}{\partial x^i}\,\frac{\mathrm{d}\tilde\gamma^i}{\mathrm{d}t}(0)\,\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{\phi(x)} = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m \frac{\partial y^j(\varphi(x))}{\partial x^i}\,X^i(x)\,\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{\phi(x)}.$$

La différentielle $\mathrm{d}\phi_x$ transforme donc le vecteur tangent X_x de coéfficients locaux $X^i(x)$ en un vecteur tangent $Y_{\phi(x)} = \mathrm{d}\phi_x(X_x)$ de coéfficients

$$Y^j(\phi(x)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial\tilde\phi^j(\varphi(x))}{\partial x^i}\,X^i(x).$$

La matrice $\left(\frac{\partial\tilde\phi^j(\varphi(x))}{\partial x^i}\right) \in \mathrm{Mat}_{nm}$ s'appelle **matrice Jacobienne** de ϕ en x, et son détérminant $\det\left(\frac{\partial\tilde\phi^j(\varphi(x))}{\partial x^i}\right)$ s'appelle **Jacobien**.

2.35 Proposition. *La différentielle d'applications sur des varietés satisfait à la règle de la chaîne : si $\phi : M\longrightarrow N$ et $\psi : N \longrightarrow O$ sont deux applications différentiables, alors*

$$\mathrm{d}(\psi\circ\phi)_x = \mathrm{d}\psi_{\phi(x)}\circ\mathrm{d}\phi_x, \qquad x\in M.$$

Preuve. Calcul en coordonnées locales. Exo. □

2.36 Proposition. *Une application $\phi : M \longrightarrow N$ est un difféomorphisme si et seulement si, en tout $x\in M$, la différentielle $\mathrm{d}\phi_x : T_xM \longrightarrow T_{\phi(x)}N$ est un isomorphisme.*

En effet, ceci est équivalent à dire que le Jacobien de ϕ en x est non-nul. On a déjà vu que ceci implique $m=n$.

2.10 Immersions, plongements et sous-varietés

Soient M et N deux varietés différentiables de dimension m et n avec $m < n$, et $\phi : M \longrightarrow N$ une application différentiable.

2.37 Definition. Si pour tout $x \in M$ la différentielle $\mathrm{d}\phi_x : T_xM \longrightarrow T_{\phi(x)}N$ a rang maximale $\mathrm{rk}\,(\mathrm{d}\phi_x) = m$, i.e. $\mathrm{d}\phi_x$ est injective, l'application $\phi : M \longrightarrow N$ s'appelle **immersion de M dans N**. Ceci est équivalent à dire que, dans toute carte locale de M, l'expression en coordonnées locales de ϕ a une différentielle $\mathrm{d}\tilde{\phi}$ injective, i.e. de rang maximale m. [Attention : une immersion n'est pas nécéssairement injective.]

Un **plongement** de M dans N est une immersion injective de M dans N. Un plongement est donc un difféomorphisme ϕ de M sur l'image $\phi(M) \subset N$.

2.38 Exemples. Une courbe parametrée $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ ayant un point cuspidale n'est pas une immersion (d'ailleur, elle n'est pas reguliére en ce point). Par exemple, $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ dans $\mathbb{R}^2$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Une courbe parametrée $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ regulière ayant des points d'auto-intersection est une immersion mais pas un plongement. Par exemple une courbe à "alpha" dans $\mathbb{R}^2$.

2.39 Definition. Une varieté M est une **sous-varieté** de N si M est un sous-ensemble de N et l'inclusion $i : M \hookrightarrow N$ est un plongement.

2.40 Exemples. La bouteille de Klein est une sous-varieté de $\mathbb{R}^4$. Le plan projectif réel peut être immergé dans $\mathbb{R}^3$ mais ce n'est pas une sous-varieté de $\mathbb{R}^3$, par contre c'est une sous-varieté de $\mathbb{R}^4$. [Do Carmo p.45]

2.41 Théorème. [Théorème de Whitney] Toute varieté différentiable de dimension m (de Hausdorff et à base denombrable) peut être immergée dans l'espace $\mathbb{R}^{2m}$ et plongée dans l'espace $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Preuve. Long..., exo ? [cf. DFN vol.2] □

2.11 Submersions et fibrés

Soient M et N deux varietés différentiables de dimension m et n avec $m < n$, et $\phi : N \longrightarrow M$ une application différentiable.

2.42 Definition. Si pour tout $y \in N$ la différentielle $\mathrm{d}\phi_y : T_yN \longrightarrow T_{\phi(y)}M$ a rang maximale $\mathrm{rk}\,(\mathrm{d}\phi_y) = m$, i.e. $\mathrm{d}\phi_y$ est surjective, l'application $\phi : N \longrightarrow M$ s'appelle **submersion de N vers M**. Ceci est équivalent à dire que, dans toute carte locale de N, l'expression en coordonnées locales de ϕ a une différentielle $\mathrm{d}\tilde{\phi}$ surjective, i.e. de rang maximale m. [Attention : une submersion n'est pas nécéssairement surjective, mais il suffit de se restreindre à l'image pour qu'elle le devienne.]

2.43 Exemples. La projection du cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{S}^1$ ou sur tout cercle centré sur son axe est une projection surjective.

De même, la projection de la bande de Möbius sur le grand cercle du plan xOy, ce qui est équivalent à projeter l'espace quotient $\big([0, 2\pi] \times \mathbb{R}\big)_{/(0,h)\sim(2\pi,-h)}$ sur $[0, 2\pi]_{/0\sim 2\pi}$.

2.44 Definition. Un **fibré (différentiel) sur M de fibre une varieté** F est une varieté N avec une application différentiable $\pi : N \longrightarrow M$ telle que

1. π est une submersion surjective ;
2. N est **localement trivial** avec fibre F, c'est-à-dire que pour tout $x \in M$ il existe un voisinage U de x dans M et un difféomorphisme $\tau_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ tel que $\mathrm{pr}_1 \circ \tau_U = \pi\Big|_U$, i.e. pour tout $y \in \pi^{-1}(U)$ on a $\tau_U(y) = (x, z)$, où $x = \pi(y)$ et $z \in F$.

On appelle N l'**espace total**, π la **projection**, M la **base** et τ_U une **trivialisation locale** du fibré. On indique le fibré par $N(M, F)$.

2.45 Exemple. Le **fibré trivial** de fibre F est la projection $\mathrm{pr}_1 : M \times F \longrightarrow M : (x, y) \mapsto x$. En particulier : le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et le tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ sont des fibrés triviaux sur $\mathbb{S}^1$, alors que la bande de Möbius ne l'est pas.

En géométrie différentielle et dans les applications en physique on a besoin de trois types de fibrés :

- Les *fibrés vectoriels* $E(M, V)$: la fibre est un espace vectoriel V ou $\mathbb{R}^k$, et quand cela a un sens on demande que les applications soient linéaires.
- Les *G-fibrés principaux* $P(M, G)$: la fibre est un groupe de Lie G, l'espace total est une varieté P sur laquelle G agit sans points fixes, la base M est difféomorphe à l'espace des orbites P/G, et quand cela a un sens on demande que les applications soient G-équivariantes.
- Les *fibrés associées à un G-fibré principal* $N(M, F, G)$ ou $E(M, V, G)$: la fibre est toute varieté F ou espace vectoriel V sur laquelle G agit à gauche. Toutes les applications sont induites par celles du fibré principal $P(M, G)$.
  En particulier, tout fibré vectoriel $E(M, V)$ peut être vu comme le fibré associé au fibré principal de groupe $G = GL(V)$, i.e. $E(M, V) = E(M, V, GL(V))$.

3 Fibrés vectoriels et espaces de sections

Soit M une varieté différentiable de dimension m.

3.1 Fibrés vectoriels

Rappelons qu'un **fibré sur M de fibre une varieté** F est une varieté $N = N(M, F)$ avec une projection différentiable $\pi : N \longrightarrow M$ (submersion surjective) et des trivialisations locales

$$\tau_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F,\ y \longmapsto (x, z), \quad \text{où} \quad x = \pi(y). \qquad \text{[DESSIN]}$$

3.1 Corollaire. *Dans tout fibré on a les proprietés suivantes :*

1. *Pour tout ouvert $U \subset M$, l'ensemble $N_U = \pi^{-1}(U)$ est un ouvert de N, qu'on appelle* **fibre sur** U.
2. *Pour tout $x \in M$, l'ensemble $N_x = \pi^{-1}(x)$ est un sous-ensemble fermé de N, qu'on appelle* **fibre sur** x*, et on a $N = \bigcup_{x\in M} N_x$.*
3. *La restriction de τ_U à tout point $x \in U$ est un difféomorphisme $\tau_U\Big|_x : N_x \longrightarrow F$ qui dépend de U.*

3.2 Definition. Un **fibré vectoriel de rang k sur M** est un fibré $\pi : E \longrightarrow M$ de fibre un espace vectoriel V de dimension k, avec trivialisations locales $\tau_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times V$ telles que toute restriction $\tau_U\Big|_x : E_x \longrightarrow \{x\} \times V$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On note $E = E(M, V)$. On peut supposer que V soit $\mathbb{R}^k$.

3.3 Exemple. [L'espace-temps.]

1. L'*espace-temps* est la varieté $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ avec coordonnées $(t, \vec{x})$, qui admet, en théorie, deux structures de fibré :
   – l'espace sur le temps, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t, \vec{x}) \mapsto t$, i.e. $\vec{x} = \vec{x}(t)$; [DESSIN]
   – le temps sur l'espace, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(t, \vec{x}) \mapsto \vec{x}$, i.e. $t = t(\vec{x})$.
   En *physique non-relativiste* [Newton et Galileo], seulement le premier fibré a sense : tous les observateurs peuvent dire si deux évenements qui évoluent dans l'espace-temps sont simultanés (en comparant l'instant ou ils ont lieu), donc *le temps est absolu.*

   En physique non-relativiste, les coordonnées de deux repères *inertiels*, c'est-à-dire qui bougent l'un par rapport à l'autre avec une vitesse constante de module v (ici fixée dans la direction $\vec{Ox}$) se transforment selon les *transformations de Galileo* :

   $$t' = t, \qquad x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

   Par contre, deux observateurs qui bougent dans l'espace-temps ne vont pas pouvoir comparer leur évolution dans le temps en fixant leurs position (car la position change aussi dans le temps). Autrement dit, ils ne peuvent pas s'accorder sur ce qu'est un point fixe (le repère commun) : l'*espace n'est pas absolu.* En conclusion, **l'espace-temps non-relativiste est un fibré sur le temps de fibre l'espace.**

2. La *théorie de la relativité* (restreinte ou générale) s'applique aux systèmes physiques où les vitesses considerées sont comparables à la vitesse de la lumière c. Dans ce cas, deux évenements qui sont simultanés pour un observateur peuvent ne pas l'être pour un autre. De même, le temps percu par deux observateurs en mouvement simultané mais avec vitesses très differentes (i.e. vitesse relative de module $v \sim c$) n'est pas le même : si l'un perçoit une durée de temps Δt, l'autre perçoit une durée dilatée $\Delta t' = \Delta t/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

   Ceci s'explique si on admet que les coordonnées de deux repères inertiels se transforment selon les *transformations de Lorentz* :

   $$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

   Ces transformations ont été verifiées avec des experiences (cf. FitzGerald, Lorentz, Larmor à propos de l'experience de Michelson-Morley et des équations de Maxwell), ensuite formalisées par Poincaré (maths) et Einstein (phys). À part une possible translation des repères, qui donne les *trasformations de Poincaré*, ces transformations sont les seules qui respectent les deux principes de la relativité : l'espace-temps est homogène, la vitesse de la lumière est constante dans tous les repères.

   Autrement dit, *le temps n'est pas absolu.* Par conséquent, **l'espace-temps relativiste n'est plus un fibré.**

   En relativité restreinte l'espace-temps est la varieté $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, où la distiction entre espace et temps est donnée par la métrique (de Minkowski au lieu qu'Euclidienne). En relativité générale l'espace-temps est une varieté qui est localement $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. On en parlera dans la Section 8.

3.2 Sections

3.4 Definition. Si $\pi : N \longrightarrow M$ est un fibré de fibre F, une **section** est une application différentiable $s : M \longrightarrow N$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$, i.e.

$$s(x) \in N_x, \qquad \text{pour tout } x \in M. \qquad \text{[DESSIN]}$$

Une **section locale** est une section définie sur un ouvert $U \subset M$, c'est-à-dire une application différentiable $s : U \longrightarrow N_U$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$.

L'ensemble des sections est noté $\Gamma(M, N)$, ou $\Gamma(N)$ si la varieté de base M est fixée. L'ensemble des sections locales définie sur $U \subset M$ est noté $\Gamma(U, N_U)$ ou $\Gamma(N_U)$, ou encore $\Gamma_U(M, N)$ ou $\Gamma_U(N)$. Parfois on noté aussi $\Gamma_{loc}(M, N)$ ou $\Gamma_{loc}(N)$ l'ensemble des sections locales, sans spécifier le domaine de définition.

Les sections peuvent être des applications de classe C^k ou de classe C^∞ (lisses). Cette regularité peut être indiquée comme $\Gamma^k(M, N)$ ou $\Gamma^\infty(M, N)$, mais elle est très souvent sous-entendue.

Si $\pi : N \longrightarrow M$ est un fibré de fibre quelconque, l'ensemble de sections $\Gamma(N)$ n'a aucune structure algébrique particulière. Par contre, pour un fibré vectoriel l'ensemble des sections a une structure qui ressemble à celle de l'ensemble des fonctions réelles sur M. Considerons un fibré vectoriel $\pi : E \longrightarrow M$.

3.5 Proposition. *L'ensemble $\Gamma(E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (de dimension infinie), et un module sur $C^\infty(M)$.*

Preuve. Pour $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on définit la combinaison linéaire $\alpha\ s_1 + \beta\ s_2 \in \Gamma(E)$ par

$$(\alpha\ s_1 + \beta\ s_2)(x) = \alpha\ s_1(x) + \beta\ s_2(x), \qquad x \in M.$$

Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ et toute section $s \in \Gamma(E)$, on définit le produit $fs \in \Gamma(E)$ par

$$(fs)(x) = f(x)\ s(x), \qquad x \in M.$$

□

3.6 Proposition. *Il y a une correspondance bijective entre trivialisations locales de E et bases de sections locales de E. Par conséquent, l'espace $\Gamma(E)$ est un module localement libre de rang k sur $C^\infty(M)$.*

Preuve. En effet, les sections ont valeur dans les fibres qui sont isomorphes à V, mais l'isomorphisme n'est pas canonique, il est donné par les trivialisations locales. Plus précisement, fixons une base $\{e_\alpha,\ \alpha = 1, ..., k\}$ de V et considerons une trivialisation $\tau : E_U \longrightarrow U \times V$. Pour tout $x \in U$, l'ensemble de vecteurs

$$e_\alpha(x) := \tau^{-1}(x, e_\alpha), \quad \alpha = 1, ..., k$$

forme alors une base de la fibre E_x. Les applications

$$e_\alpha : U \longrightarrow E_U,\ x \longmapsto e_\alpha(x), \qquad \alpha = 1, ..., k$$

sont donc des sections locales (différentiables) du fibré E, qui forment une base de $\Gamma(E_U)$ comme $C^\infty(U)$-module. Cette correspondance est bijective : si pour $\alpha = 1, ..., k$ on a des sections locales $\sigma_\alpha : U \longrightarrow E_U$ telles qu'en tout $x \in U$ l'ensemble $\{\sigma_\alpha(x),\ \alpha = 1, ..., k\}$ soit une base de E_U, alors on défini une trivialisation $\tau_U : E_U \longrightarrow U \times V$ par

$$y = \sum_{\alpha=1}^{k} y^\alpha(x)\ \sigma_\alpha(x) \quad \longmapsto \quad \tau_U(y) = \left(x, \sum_{\alpha=1}^{k} y^\alpha(x)\ e_\alpha \right).$$

Sur chaque ouvert U supportant une trivialisation τ_U, une section $s : U \longrightarrow E_U$ s'écrit donc comme combinaison $C^\infty(U)$-linéaire

$$s\Big|_U = \sum_{\alpha=1}^{k} s^\alpha\ e_\alpha, \qquad s^\alpha \in C^\infty(U).$$

□

3.7 Corollaire. *Un fibré E de rang k est trivial si et seulement si le $C^\infty(M)$-module $\Gamma(E)$ est libre, i.e. si E admet une base de k sections globales.*

3.8 Exemples. 1. Si $E = M \times \mathbb{R}$, les sections de E sont les fonctions à valeurs réels sur M, i.e. $\Gamma^\infty(E) = C^\infty(M)$.

2. Si $E = M \times \mathbb{R}^k$, les sections de E sont les fonctions vectorielles sur M.

3.3 Morphismes entre fibrés sur la même varieté

3.9 Definition. Un **morphisme** entre deux fibrés $\pi : N \longrightarrow M$ et $\pi' : N' \longrightarrow M$ sur la même base est une application différentiable $\phi : N \longrightarrow N'$ qui respecte les fibres, i.e. telle que $\phi \circ \pi = \pi'$. Puisque $f(y) \in N'_x$ pour tout $y \in N_x$, le morphisme de fibré f induit une application différentiable $f_x : N_x \longrightarrow N'_x$ sur chaque fibre.

Un **isomorphisme** entre deux fibrés est un morphisme inversible, i.e. un difféomorphisme entre les espaces totales qui preserve les fibres. Il induit un difféomorphisme sur chaque fibre.

Enfin, un **automorphisme** est un isomorphisme d'un fibré sur lui-même.

On note $\mathrm{Mor}(N, N')$ l'ensemble de morphismes de fibrés entre N et N', $\mathrm{Iso}(N, N')$ celui des isomorphismes, et $\mathrm{Aut}\,(N)$ l'ensemble des automorphismes du fibré N.

3.10 Definition. Si $\phi : N \longrightarrow N'$ est un morphisme de fibrés, on appelle **push forward de** ϕ l'application

$$\phi_* : \Gamma(N) \longrightarrow \Gamma(N'), \quad s \mapsto \phi \circ s.$$

Le foncteur Γ des sections de fibré est donc covariant.

Si $\pi : E \longrightarrow M$ et $\pi' : E' \longrightarrow M$ sont deux fibrés vectoriels, les espaces $\Gamma(E)$ et $\Gamma(E')$ sont des modules sur $C^\infty(M)$. Un morphisme doit preserver ces structures.

3.11 Definition. Une application $\phi : E \longrightarrow E'$ est un **morphisme de fibrés vectoriels** si

1. ϕ **preserve les fibres**, et induit donc une application $\phi_x : E_x \longrightarrow E'_x$ sur chaque fibre ;
2. ϕ est **linéaire sur chaque fibre**, i.e. l'application $\phi_x : E_x \longrightarrow E'_x$ est linéaire, pour tout $x \in M$.

3.12 Proposition. *Le push forward d'un morphisme $\phi : E \longrightarrow E'$ est une application $C^\infty(M)$-linéaire $\phi_* : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E')$. De plus, une application $\Phi : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E')$ entre sections est le push forward d'un morphisme de fibrés $\phi : E \longrightarrow E'$ si et seulement si Φ est $C^\infty(M)$-linéaire. Cela signifie que*

$$\mathrm{Mor}(E, E') \;\cong\; \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma(E), \Gamma(E')).$$

Preuve. 1) Soit $\phi_* : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E')$ le push-forward de $\phi : E \longrightarrow E'$. Pour tout $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ et pour tout $x \in M$, on a

$$\phi_*(f_1 s_1 + f_2 s_2)(x) = \phi\big(f_1(x) s_1(x) + f_2(x) s_2(x)\big) = f_1(x)\phi\big(s_1(x)\big) + f_2(x)\phi\big(s_2(x)\big) = \Big(f_1\phi(s_1) + f_2\phi(s_2)\Big)(x),$$

ce qui prouve que

$$\phi_*\big(f_1 s_1 + f_2 s_2\big) = f_1\phi(s_1) + f_2\phi(s_2),$$

c'est-à-dire que ϕ_* est une application $C^\infty(M)$-linéaire.

2) Viceversa, soit $\Phi : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E')$ une application $C^\infty(M)$-linéaire. Montrons qu'il existe un morphisme de fibrés $\phi : E \longrightarrow E'$ tel que $\Phi = \phi_*$. D'abord, definissons $\phi : E \longrightarrow E'$. Pour tout $y \in E$, on a $y \in E_x$ où $x = \pi(y)$. Soit τ_U une trivialisation de E autour de x, et soit $\{e_\alpha : U \longrightarrow E_U,\ \alpha = 1, ..., k\}$ une base de sections de E sur U. Alors on peut écrire $y = \sum_\alpha y^\alpha\, e_\alpha(x)$, avec des coéfficients $y^\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout α, on a évidemment $\Phi(e_\alpha) \in \Gamma(E'_U)$ et $\Phi(e_\alpha)(x) \in E'_x$. On peut donc poser

$$\phi_x(y) := \sum_{\alpha=1}^{k} y^\alpha\ \Phi(e_\alpha)(x),$$

et $\phi : E \longrightarrow E'$ comme l'application définie sur chaque fibre E_x par ϕ_x.

Par définition, donc, l'application ϕ respecte les fibres. Elle est linéaire sur les fibres, car pour tout $y_1, y_2 \in E_x$ et tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ on a

$$\phi\big(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\big) = \phi\Big(\sum_\alpha \big(\lambda_1 y_1^\alpha + \lambda_2 y_2^\alpha\big)\ e_\alpha(x)\Big) = \sum_\alpha \big(\lambda_1 y_1^\alpha + \lambda_2 y_2^\alpha\big)\ \Phi(e_\alpha)(x) = \lambda_1\phi(y_1) + \lambda_2\phi(y_2),$$

où on utilise l'hypothèse que Φ soit $C^\infty(M)$-linéaire. Donc ϕ est un morphisme de fibrés.

Enfin, on a bien $\Phi = \phi_*$, c'est-à-dire $\Phi(s) = \phi_*(s) = \phi \circ s$ pour tout $s \in \Gamma(E)$, car pour tout $x \in M$ on a

$$\phi\big(s(x)\big) = \phi\Big(\sum_\alpha\ s^\alpha(x)\ e_\alpha(x)\Big) = \sum_\alpha\ s^\alpha(x)\ \Phi(e_\alpha)(x) = \Phi\Big(\sum_\alpha s^\alpha e_\alpha\Big)(x) = \Big(\Phi(s)\Big)(x).$$

□

3.4 Fonctions de transition et groupe structural

Localement, deux fibrés sur M de même fibre F sont identiques. Globalement, par contre, ils peuvent ètre different (par exemple, le cylindre et la bande de Möbius). Ce qui les distingue est la façon dont les fibres $M \times F$ sont recollées pour faire l'espace total N. Ce recollement est décrit par les fonctions de transition.

3.13 Definition. Soit $\pi : N \longrightarrow M$ un fibré, avec trivialisations locales $\{(U, \tau_U)\}$. Si τ_U et τ_V sont deux trivialisations locales telles que $U \cap V \neq \emptyset$, la composée $\tau_U \circ \tau_V^{-1}$ est un difféomorphisme sur $(U \cap V) \times F$ qui preserve les points de $U \cap V$, c'est-à-dire qu'on a

$$\tau_U \circ \tau_V^{-1}(x, z) = (x, g^x_{UV}(z)), \qquad x \in U \cap V, \quad z \in F,$$

où l'application $g_{UV} : U \cap V \longrightarrow \mathrm{Diff}\,(F), x \mapsto g^x_{UV}$, à valeurs dans les difféomorphismes de F, s'appelle **fonction de transition** et a les proprietés suivantes, dites **proprietés de cocycle** :

$$\begin{aligned} &g^x_{UU} = \mathrm{id}_F, \qquad x \in U; \\ &g^x_{VU} = \big(g^x_{VU}\big)^{-1}, \qquad x \in U \cap V; \\ &g^x_{UV} \circ g^x_{VW} \circ g^x_{WU} = \mathrm{id}_F, \qquad x \in U \cap V \cap W. \end{aligned} \tag{6}$$

[N.B. La collection d'applications g_{UV} est un *cocylcle* dans la *cohomologie de Čech*.]

3.14 Proposition. *Les fonctions de transition permettent de reconstruire le fibré à partir de la base M et de la fibre F. Plus précisement, si $\{U_r\}$ est un recouvrement de M sur lequel sont définies les trivialisations locales de N, pour tout $x \in U_r \cap U_s$ on défini une relation d'équivalence*

$$(x, z) \sim (x', z') \quad \Longleftrightarrow \quad x' = x \quad \text{et} \quad z' = g^x_{U_r U_s}(z). \tag{7}$$

L'ensemble des classe d'équivalence $\Big(\bigcup_r (U_r \times F)\Big)_\sim$ est un fibré isomorphe au fibré de départ N.

Preuve. Soit $\pi : N \longrightarrow M$ le fibré de départ, avec trivialisations $\tau_r : N_{U_r} \xrightarrow{\cong} U_r \times F$ et fonctions de transition $g_{rs} : U_r \cup U_s \longrightarrow \mathrm{Diff}\,(F)$. Sur l'ensemble $\bigcup_r (U_r \times F)$, la relation (7) est une relation d'équivalence car les proprietés (6) impliquent

$$\begin{aligned} &(x, z) \sim (x, z), \qquad x \in U_r, \quad z \in F; \\ &(x, z) \sim (x', z') \quad \Longleftrightarrow \quad (x', z') \sim (x, z), \qquad x, x' \in U_r \cup U_s, \quad z, z' \in F; \\ &(x, z) \sim (x', y') \quad \text{et} \quad (x', z') \sim (x", z") \quad \Longrightarrow \quad (x, z) \sim (x", z"), \qquad x, x', x" \in U_r \cup U_s \cup U_t, \quad z, z', z" \in F. \end{aligned}$$

On peut donc considerer l'espace quotient $\tilde N = \Big(\bigcup_r (U_r \times F)\Big)_\sim$. Celui-ci est évidemment un fibré sur M, avec la projection $\tilde\pi : \tilde N \longrightarrow M$, $\tilde\pi(x, y) = x$. Le fibré N est isomorphe au fibré $\tilde N$, car l'application $\tau : N \longrightarrow \tilde N$ induite par les trivialisations locales, i.e. définie sur tout $y \in N$ par

$$\tau(y) := \tau_r(y), \quad \text{oú } y \in N_{U_r} \subset N,$$

respecte la fibre, i.e. $\tilde\pi\big(\tau(y)\big) = \pi(y)$, et est donc un isomorphisme de fibrés sur M. □

3.15 Definition. Ce qui distingue un fibré d'un autre de même fibre F est donc le sous-groupe de $\mathrm{Diff}\,(F)$ où ont valeurs les fonctions de transition. Ce groupe s'appelle **groupe structural** du fibré. Un fibré trivial a comme groupe structural le groupe trivial $\{\mathrm{id}\}$. Plus le groupe structural est grand plus le fibres ont de liberté en se recollant les unes aux autres.

3.16 Exercice. Montrer qu'un fibré $\pi : E \longrightarrow M$ de fibre un espace vectoriel V est un fibré vectoriel si et seulement si les fonctions de transition g_{UV} sont des difféomorphismes à valeurs dans le groupe $GL(V)$ des automorphismes de V.

3.17 Exercice. La cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et la bande de Möbius M sont deux fibrés vectoriels de rang 1 sur $\mathbb{S}^1$. Montrer que la bande de Möbius a groupe structural $\mathbb{R}_* = GL_1(\mathbb{R})$ (qui peut être reduit à $\pm\mathrm{id}$ en dilatant les coordonnées locales), alors que le cylindre a comme groupe structural le groupe trivial (ou le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^+_* = GL^+_1(\mathbb{R})$ si on ne dilate pas les coordonnées).

3.5 (*) Tenseurs de type (p, q)

3.18 Definition. Soit V un espace vectoriel réel de dimension m et V^* son dual linéaire. Un **tenseur de type** (p, q) sur V est un élément de $V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$. Puisque $(V^*)^* \cong V$ et $(V \otimes W)^* = V^* \otimes W^*$, un tenseur de type (p, q) sur V peut être vu comme une application linéaire $T : (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle **rang** du tenseur la somme $p + q$. On note $T^{(p,q)}(V)$ l'ensemble des tenseurs de type (p, q) sur V.

3.19 Proposition. *L'ensemble $T^{(p,q)}(V)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension $m(p + q)$, isomorphe à l'ensemble des applications linéaires $(V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Si $\{e_i,\ i=1,...,m\}$ est une base de V, et $\{e^j=e_j^*,\ j=1,...,m\}$ est la base duale de V^*, une base de $T^{(p,q)}$ est donnée par

$$\Big\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_q},\quad i_1,...,i_p,j_1,...,j_q=1,...,m\Big\}.$$

Dans cette base, un tenseur de type (p,q) s'exprime comme combinaison linéaire

$$T=\sum_{i,j} T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}\ e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_q}.$$

Quand une base de V est fixée, et on regarde un tenseur de type (p,q) comme une application linéaire agissant sur $(V^*)^{\otimes p}\otimes V^{\otimes q}$, on identifie T avec la matrice

$$\Big(T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}:=T(e^{i_1},...,e^{i_p},e_{j_1},...,e_{j_q})\Big),$$

qui le represente dans cette base.

3.20 Definition. Soient $\{e_i,\ i=1,...,m\}$ et $\{b_i,\ i=1,...,m\}$ deux bases de V, et soit $A=(a_i^j)$ la matrice $m\times m$ du changement de base, i.e. $b_i=\sum_{j=1}^m a_i^j e_j$ pour tout $i=1,...,m$. On appelle **contravariant** un vecteur w qui, par changement de base de matrice A, se transforme comme $A^{-1}w$. On appelle **covariant** un vecteur w qui, par changement de base de matrice A, se transforme comme Aw.

3.21 Proposition. *Les vecteurs de V sont contravariants, les covecteurs de V^* sont covariants, et les tenseurs de type (p,q) sont donc contravariant d'ordre p et covariant d'ordre q.*

Preuve. Un vecteur $v\in V$, par changement de base de $E=\{e_i,\ i=1,...,m\}$ vers $B=\{b_i,\ i=1,...,m\}$ de matrice A, se transforme avec la matrice A^{-1}, car $e_j=\sum_{j=1}^m (A^{-1})_i^j b_i$ et donc $v=\sum_i v^i e_i=\sum_{i,j} v^i (A^{-1})_i^j b_j=\sum_j (A^{-1}v) b_j$.

Au contraire, la base duale $\{b^i=b_i^*,\ i=1,...,m\}$ de V se trouve à partir de $\{e^i=e_i^*,\ i=1,...,m\}$ avec la matrice A^{-1}. Donc un covecteur $v^*\in V^*$, par changement de base, se transforme avec la matrice A. □

3.6 Algèbre linéaire avec les fibrés vectoriels

Dans ce paragraphe, on considère des fibrés vectoriels $\pi:E\longrightarrow M$.

3.22 Definition. Le **fibré dual** d'un fibré $\pi:E\longrightarrow M$ est le fibré

$$E^*:=\bigcup_{x\in M} E_x^*\longrightarrow M,$$

où $E_x^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_x,\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel dual de E_x.

3.23 Exercice. Montrer que le fibré dual E^* est l'ensemble des morphismes du fibré E vers le fibré trivial de rang 1 :

$$E^*\ \cong\ \mathrm{Mor}(E,M\times\mathbb{R}).$$

Par conséquent, les sections du fibré dual E^* sont les applications $C^\infty(M)$-linéaires sur les sections de E à valeur dans les fonctions sur M :

$$\Gamma(E^*)\ \cong\ \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma(E),C^\infty(M))=:\Gamma(E)^*.$$

3.24 Definition. Le **produit tensoriel** de deux fibrés $\pi:E\longrightarrow M$ et $\pi':E'\longrightarrow M$ est le fibré

$$E\otimes E':=\bigcup_{x\in M}(E_x\otimes E'_x)\longrightarrow M$$

où la projection restreinte à $E_x\otimes E'_x$ est donnée par le produit $\pi|_{E_x}\otimes\pi'|_{E'_x}$ des deux projections restreintes. Si les fibrés E et E' ont rang k et k', le produit tensoriel $E\otimes E'$ a rang kk'.

3.25 Exercice. Montrer que le fibré trivial de rang 1 est l'unité du produit tensoriel, i.e. $E\otimes(M\times\mathbb{R})\cong E$.

Montrer ensuite que les sections de $E\otimes E'$ sont le produit tensoriel sur $C^\infty(M)$ des sections de E par celles de E' :

$$\Gamma(E\otimes E')\ \cong\ \Gamma(E)\otimes_{C^\infty(M)}\Gamma(E').$$

3.26 Definition. Le **fibré tensoriel de type** (p,q) sur un fibré $\pi:E\longrightarrow M$ est le fibré

$$T^{(p,q)}E\equiv T^p_qE:=\bigcup_{x\in M}(E_x^{\otimes p}\otimes(E_x^*)^{\otimes q})\longrightarrow M.$$

Si le fibré E a rang k, le fibré $T^{(p,q)}E$ a rang k^{p+q}.

3.27 Exercice. Montrer que les sections de ce fibré peuvent s'exprimer de plusieurs façons :

$$\begin{aligned}\Gamma(T^{(p,q)}E) &\cong \Gamma(E^{\otimes p}) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma((E^*)^{\otimes q}) \cong \Gamma(E)^{\otimes p} \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(E^*)^{\otimes q} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma(E^{\otimes q}), \Gamma(E^{\otimes p})) \cong \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma(E)^{\otimes q}, \Gamma(E)^{\otimes p}).\end{aligned}$$

3.28 Definition. Le **q-ème produit extérieur** d'un fibré $\pi : E \longrightarrow M$ est le fibré

$$\Lambda^q E := \bigcup_{x \in M} \Lambda^q E_x \longrightarrow M.$$

Si le fibré E a rang k, le fibré $\Lambda^q E$ a rang $\binom{k}{q}$.

3.29 Exercice. Montrer que les sections du fibré $E \wedge E'$ sont le produit extérieur sur $C^\infty(M)$ des sections de E par celles de E' :

$$\Gamma(E \wedge E') \cong \Gamma(E) \wedge_{C^\infty(M)} \Gamma(E').$$

3.30 Definition. Le **fibré des endomorphismes** d'un fibré $\pi : E \longrightarrow M$ est le fibré

$$\mathrm{End}\, E := \bigcup_{x \in M} \mathrm{End}\, E_x \longrightarrow M,$$

où $\mathrm{End}\, E_x$ est l'ensemble des applications linéaires sur chaque fibre E_x. Si E a rang k, une trivialisation locale de $\mathrm{End}\, E$ sur $U \subset M$ identifie $(\mathrm{End}\, E)\Big|_U = \mathrm{End}\,(E\Big|_U)$ avec $U \times M_k(\mathbb{R})$, où $M_k(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées de taille k. Le fibré $\mathrm{End}\, E$ a donc rang k^2.

3.31 Exercice. Montrer qu'il y a un isomorphisme de fibrés

$$\mathrm{End}\, E \cong E \otimes E^*.$$

3.32 Exercice. On sait que l'ensemble des sections $\Gamma(\mathrm{End}\, E)$ est un module sur $C^\infty(M)$. Montrer que c'est aussi une algèbre associative, avec produit $\Gamma(\mathrm{End}\, E) \otimes \Gamma(\mathrm{End}\, E) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{End}\, E)$ défini sur deux sections $A, B \in \mathrm{End}\, E$ comme

$$(AB)(x) = A(x) \circ B(x), \qquad x \in M,$$

où $A(x) \circ B(x)$ est la composée des deux applications linéaires $A(x), B(x) \in \mathrm{End}\, E_x$.

4 Champs de vecteurs

4.1 Fibré tangent

Soit M une varieté différentiable de dimension m.

4.1 Definition. On appelle **fibré tangent** sur M l'union disjointe des espaces tangents

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

4.2 Proposition. *Le fibré tangent est un fibré vectoriel de rang m, avec projection $\pi : TM \longrightarrow M$, $\pi(X_x) = x$.*

Preuve. Il faut montrer que TM est une varieté différentiable, que π est une submersion, et qu'il y a des trivialisations locales de fibre $\mathbb{R}^m$. Les cartes et les trivialisations locales de TM se trouvent à partir d'un atlas de cartes sur M.
Soit $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une carte de M et appellons $(x^1, ..., x^m)$ les coordonnées locales dans $\varphi(U)$. Puisque $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ est un difféomorphisme, sa différentielle en tout point $x \in U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathrm{d}\varphi_x : T_x U \longrightarrow T_{\varphi(x)}\varphi(U)$. Appellons τ l'application induite sur $TU = \bigcup_{x \in U} T_x U = TM\Big|_U$ par les différentielles $\mathrm{d}\varphi_x$ quand x varie dans U, composée avec l'isomorphisme canonique

$$i_x : T_{\varphi(x)}\varphi(U) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m, \quad \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(x)} \mapsto e^i, \qquad i = 1, ..., m,$$

où $\{e^i\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^m$. On obtient une application

$$\tau : TU \longrightarrow \bigcup_{x \in U} T_{\varphi(x)}\varphi(U) \cong \bigcup_{x \in U} \mathbb{R}^m \cong U \times \mathbb{R}^m, \qquad (x, X_x) \mapsto (x, i_x(\mathrm{d}\varphi_x(X_x)))$$

qui est évidemment un difféomorphisme et donne ainsi une trivialisation locale.
Si on compose τ avec la carte $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ on obtient l'application $\bar{\varphi} : TM\Big|_U = TU \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m}$ définie sur tout $X_x = \sum_{i=1}^m X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x \in T_x M$ par

$$\bar{\varphi}(x, X_x) = (\varphi(x), i_x(\mathrm{d}\varphi_x(X_x))) = (x^1(x), ..., x^m(x), X^1(x), ..., X^m(x)),$$

qui donne une une carte sur TM. Il est facile de montrer que les changement de cartes sont des difféomorphismes et que la projection π est une seubmersion. Le fibré TM est donc une varieté différentiable de dimension $2m$. $\square$

4.3 Exemples. [Fibré tangent aux sphères.]

1. **Le fibré $T\mathbb{S}^n$ est trivial pour $n = 1, 3, 7$.** En particulier, $T\mathbb{S}^1$ est isomorphe au cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. L'explication est que ces trois sphères sont des **groupes de Lie** pour $n = 1, 3$ et un **Moufang loop** pour $n = 3$ (i.e. une version non-associative d'un groupe) :

$$\mathbb{S}^1 = U(1), \qquad \mathbb{S}^3 = SU(2), \qquad \mathbb{S}^7 = \{\text{vecteurs unitaires dans les octonions}\}.$$

   On verra dans la Section 10 que si G est un groupe de Lie alors TG est toujours trivial.

2. **Le fibré $T\mathbb{S}^n$ n'est pas trivial pour n pair.** La preuve passe par l'inexistence de n sections linéairement independentes. En effet, toute section de $T\mathbb{S}^n$, pour n pair, s'annulle en au moins un point. Ce théorème a été enoncé par Poincaré à la fin du 19ème siècle, et demontré par Brouwer en 1912, avec des notions de topologie algébrique (caractéristique d'Euler et indice de Poincaré-Hopf). En particulier, se résultat pour $\mathbb{S}^2$ signifie que "on ne peut pas peigner une noix de coco sans créer une mèche".

4.4 Exercice. Le fibré tangent au tore $\mathbb{T}^2$ est-il trivial ?

4.2 Champs de vecteurs

4.5 Definition. Un **champ de vecteurs** sur M est une section $X : M \longrightarrow TM$ du fibré tangent sur M. On note $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M. D'après la Section 3, $\mathfrak{X}(M)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et un module localement libre de rang m sur $C^\infty(M)$. Une base locale de champs de vecteurs (sur un ouvert de trivialisation TU) est donnée par les dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \longrightarrow TU = TM\Big|_U, \quad x \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x, \qquad i = 1, ..., m.$$

Tout champ de vecteurs X sur M s'exprime alors localement comme combinaison $C^\infty(U)$-linéaire

$$X\Big|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad X^i \in C^\infty(U).$$

4.6 Proposition. *Les champs de vecteurs sur M sont les dérivations de $C^\infty(M)$ à valeurs dans $C^\infty(M)$, i.e.*

$$\mathfrak{X}(M) \;\cong\; \mathrm{Der}(C^\infty(M), C^\infty(M)).$$

Preuve. Soit X un champ de vecteur, avec expression en coordonnées locales $X\Big|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ dans une carte (U,φ). Pour tout $f \in C^\infty(M)$, on considère la fonction Xf sur M définie en tout point $x \in U$ par

$$(Xf)(x) = \Big(X\Big|_U f\Big)(x) = \sum_{i=1}^m X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_x = \sum_{i=1}^m X^i(x) \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\big(\varphi(x)\big).$$

Alors Xf est une fonction C^∞, car sur toute carte (U',φ') son expression en coordonnées locales $\widetilde{Xf} = Xf \circ \varphi'$ est C^∞ : pour tout $(y^1,...,y^m) \in \varphi'(U'\cap U)$, avec $x \in U'\cap U$, on a

$$\widetilde{Xf}(y^1,...,y^m) = \sum_{i=1}^m X^i(x) \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\big(\varphi(x)\big) = \sum_{i,j=1}^m X^i(x) \frac{\partial(f\circ(\varphi')^{-1})}{\partial y^j}\big(\varphi'(x)\big) \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\big(\varphi(x)\big),$$

où $(y^1,...,y^m) = \psi(x^1,...,x^m)$ est le changement de coordonnées de U à U'. Dans cette expression, tous les facteurs sont de classe C^∞. Enfin, l'application $f \mapsto Xf$ est évidemment une dérivation.
Inversement, comme on l'a montré pour les dérivations en un point et les vecteurs tangent, on montre que toute dérivation sur $C^\infty(M)$ est une combinaison $C^\infty(M)$-linéaire des opérateurs locaux $\frac{\partial}{\partial x^i}$, et donc un champ de vecteurs sur M. □

4.7 Exemple. [Champs de vecteurs sur les sphères.]
1. Sur $\mathbb{S}^1 = \{e^{it}\}$, tout champ de vecteurs est de la forme $X_t = f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, avec $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$.
2. Sur $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2=1\}$, tout champ de vecteur est de la forme

$$X_{(x,y,z)} = f(x,y,z)\,\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y,z)\,\frac{\partial}{\partial y} + h(x,y,z)\,\frac{\partial}{\partial z},$$

avec $f,g,h \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ telles que $x\ f(x,y,z) + y\ g(x,y,z) + z\ h(x,y,z) = 0$.
Exo : décrire les champs de vecteurs de $\mathbb{S}^2$ en coordonnées sphériques.

4.8 Definition. Une **algèbre de Lie** est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une opération bilinéaire $[\ ,\ ]$, qu'on appelle **crochet de Lie**, qui a les proprietés suivantes :
1. le crochet est **antisymmétric** : $[a,b] = -[b,a]$ pour tout $a,b \in \mathfrak{g}$;
2. le crochet satisfait l'**identité de Jacobi** : $[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0$, pour tout $a,b,c \in \mathfrak{g}$.

Par conséquent, on a aussi :
- $[a,a] = 0$ pour tout $a \in \mathfrak{g}$;
- l'**identité de Leibniz** : $[a,[b,c]] = [[a,b],c] + [b,[a,c]]$, pour tout $a,b,c \in \mathfrak{g}$. Ceci signifie que $[a,\ ]$ est une dérivation sur $\mathfrak{g}$ par rapport au crochet même.

4.9 Corollaire. *Les champs de vecteurs $\mathfrak{X}(M)$ forment une algébre de Lie, avec crochet*

$$[X,Y]f = X\big(Yf\big) - Y\big(Xf\big), \qquad f \in C^\infty(M),$$

qui vaut, en coordonnées locales,

$$[X,Y]\Big|_U = \sum_{i,j=1}^m \Big(X^i\,\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i\,\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\Big)\,\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Preuve. Le crochet de Lie sur $\mathfrak{X}(M)$ est induit par le crochet de Lie naturel sur les dérivations $\mathrm{Der}(C^\infty(M), C^\infty(M))$, donné par $[D_1,D_2] = D_1\circ D_2 - D_2\circ D_1$. **Exo :** montrer que $[D_1,D_2]$ est bien une dérivation. □

4.3 Transport d'un champ par un difféomorphisme

Soit $\phi : N \longrightarrow M$ un difféomorphisme.

4.10 Definition. Le **pull back de** ϕ est l'application linéaire $\phi^* : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(N)$ définie en $X \in \mathfrak{X}(M)$ par

$$(\phi^*X)(y) := \mathrm{d}\phi_y^{-1}(X_{\phi(y)}), \qquad y \in N.$$

Le pull back de champs sera utilisé pour étudier les groupes de Lie, parce que il preserve le crochet de Lie.

4.11 Exercice. Montrer que le pull back preserve la structure d'algèbre de Lie des champs :

$$[\phi^*X_1, \phi^*X_2] := \phi^*[X_1,X_2], \qquad X_1,X_2 \in \mathfrak{X}(M).$$

4.12 Remarque. On appelle **push forward de** ϕ le pull back de ϕ^{-1}, i.e. l'application $\phi_* : \mathfrak{X}(N) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ définie par

$$(\phi_*Y)(x) := \mathrm{d}\phi_y(Y_y), \qquad Y \in \mathfrak{X}(N), \qquad x \in M, \qquad y = \phi^{-1}(x) \in N.$$

Ce push forward coincide avec celui défini dans la Section 3, à moins d'une modification due au fait que les fibrés TM et TN ont deux bases différentes.

4.4 Courbes intégrales et flots

4.13 Definition. Une courbe regulière $\gamma : I \longrightarrow M$ s'appelle **courbe intégrale** d'un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ si

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}, \qquad \text{pour tout } t \in I.$$

En coordonnées locales, si on pose $\tilde{\gamma}(t) = (x^1(t), ..., x^m(t))$, ceci est équivalent aux équations différentielles du 1er ordre

$$\dot{x}^i(t) = X^i(x^1(t), ..., x^m(t)), \qquad i = 1, ..., m.$$

4.14 Proposition. *Pour tout $x \in M$, il existe une unique courbe intégrale maximale de $X \in \mathfrak{X}(M)$ qui passe par x.*

Preuve. En partant d'une carte (U, φ) de M qui contient x, on trouve la courbe intégrale en coordonnées locales comme solution du système d'équations différentielles du 1er ordre avec condition initiale $\tilde{\gamma}(0) = \varphi(x)$. Ensuite on prolonge la courbe d'une carte à une autre en choisissant à chaque fois un point qui se trouve sur l'intersection des deux cartes. On obtient ainsi une courbe ayant domaine de définition $I \subset \mathbb{R}$ maximale. □

4.15 Exercice. Trouver les courbes intégrales des deux champs de vecteurs suivants :

$$X = x\,\frac{\partial}{\partial y} - y\,\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \text{sur } \mathbb{R}^2,$$

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{\partial}{\partial y} - \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \text{sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

4.16 Definition. Le **flot** d'un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ est l'application $\phi^X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Diff}\,(M),\ t \mapsto \phi^X_t$ définie sur $x \in M$ par

$$\phi^X_t(x) = \gamma(t) \in M,$$

où γ est la courbe intégrale maximale de X qui passe par x. Le flot ϕ^X a donc le même domaine I de γ. Autrement dit, le flot de X est défini par l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi^X_t(x) = X_{\phi^X_t(x)}, \qquad \phi^X_0(x) = x.$$

Si on fixe $x \in M$, le flot appliqué à x s'appelle aussi **exponentiel** :

$$\exp_x : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow M, \qquad \exp_x(tX) = \phi^X_t(x).$$

L'exponentiel est donc défini par l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp_x(tX) = X_{\exp_x(tX)}, \qquad \exp_x(0) = x.$$

4.17 Proposition. *Le flot de X est un sous-groupe à un paramètre de* Diff (M) *:*

1. $\phi^X_0 = \mathrm{id} : M \longrightarrow M$;
2. $\phi^X_s \circ \phi^X_t = \phi^X_{s+t}$ *pour tout* $s, t \in I$.

Preuve. Exo. [En fait, chercher pourquoi ϕ^X_t est un difféomorphisme.] □

4.5 (*) Dérivée de Lie des champs de vecteurs

4.18 Definition. Pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, la **dérivée de Lie par rapport à** X est l'application $\mathcal{L}_X : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ définie sur $Y \in \mathfrak{X}(M)$ par

$$\mathcal{L}_X(Y) : x \longrightarrow \mathcal{L}_X(Y)_x := \lim_{t\to 0} \frac{\big((\phi^X_t)^*Y\big)_x - Y_x}{t},$$

où $\phi^X_t : M \longrightarrow M$ est le flot de X et $(\phi^X_t)^* : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ est son pull-back.

4.19 Proposition. *Pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, on a $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$.*

5 Formes différentielles

5.1 Fibré cotangent

5.1 Definition. L'**espace cotangent** à M en $x \in M$ est l'espace vectoriel T_x^*M dual linéaire de l'espace tangent T_xM, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires $\omega_x : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$, qui s'appellent **covecteurs**. L'espace cotangent T_x^*M a donc la même dimension de l'espace tangent T_xM, c'est-à-dire la dimension de la varieté M.

5.2 Proposition. *Pour toute carte (U, φ) autour de $x \in M$, l'ensemble $\{\mathrm{d}x_x^i,\ i = 1, ..., m\}$ des différentielles des fonctions coordonnées sur U est une base de l'espace cotangent T_x^*M, duale de la base $\{\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x,\ j = 1..., m\}$ de T_xM.*

Preuve. Soient $x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées sur U, avec $i = 1, ..., m$. Pour tout i, la différentielle $\mathrm{d}x_x^i$ est l'application linéaire

$$\mathrm{d}x_x^i : T_xU \cong T_xM \longrightarrow T_{x^i(x)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}, \qquad \mathrm{d}x_x^i(\gamma'(0)) = (x^i \circ \gamma)'(0) = \frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}^i(0)}{\mathrm{d}t}.$$

Montrons que $\mathrm{d}x_x^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x\Big) = \delta_j^i$. On a $\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x = \gamma_j'(0)$, où $\gamma_j(t) = \varphi^{-1}(0, ..., t, ..., 0)$, donc $\tilde{\gamma}_j(t) = (0, ..., t, ..., 0)$ et $\tilde{\gamma}_j^i(t) = \delta_j^i\ t$, d'ou suit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\gamma}_j^i(0) = \delta_j^i$. $\square$

Tout coveteur $\omega_x \in T_x^*M$ s'exprime donc, en coordonnées locales, comme combinaison

$$\omega_x = \sum_{i=1}^m \omega_i(x)\ \mathrm{d}x_x^i, \qquad \text{avec} \quad \omega_i \in C^\infty(U).$$

5.3 Definition. On appelle **fibré cotangent** sur M l'union disjointe des espaces cotangents

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M$$

5.4 Exercice. Montrer que le fibré cotangent est un fibré vectoriel de rang m, avec projection $\pi : T^*M \longrightarrow M$, $\pi(\omega_x) = x$, dual du fibré tangent, i.e. $T^*M = (TM)^*$.

5.2 Formes différentielles

5.5 Definition. Pour tout $q \geq 0$, une **forme différentielle d'ordre** q sur M, ou q**-forme**, est une section $\omega : M \longrightarrow \Lambda^q T^*M$ du q-ème produit extérieur du fibré cotangent, où $\Lambda^0 T^*M = M \times \mathbb{R}$.

L'ensemble des q-formes différentielles sur M est noté $\Omega^q(M) = \Gamma(\Lambda^q T^*M)$. C'est donc un **module localement libre de rang $\binom{m}{q}$ sur** $C^\infty(M)$, avec base locale

$$\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_q} : U \longrightarrow \Lambda^q T^*U, \quad x \mapsto \mathrm{d}x_x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_x^{i_q}, \qquad 1 \leq i_1 < ... < i_q \leq m.$$

En particulier, $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$, $\Omega^m(M)$ a rang 1 et $\Omega^q(M) = 0$ si $q > m$.

Toute q-forme différentielle ω s'exprime alors, sur une carte (U, φ), comme combinaison $C^\infty(U)$-linéaire

$$\omega\Big|_U = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_q \leq m} \omega_{i_1,...,i_q}\ \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_q}, \qquad \omega_{i_1,...,i_q} \in C^\infty(U).$$

5.6 Proposition. *Pour tout $q \geq 1$, une q-forme est une application antisymmétrique sur q champs de vecteurs : on a un isomorphisme de $C^\infty(M)$-modules*

$$\Omega^q(M) \quad \cong \quad \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Lambda^q \mathfrak{X}(M), C^\infty(M)),$$

où la puissance extérieure dans $\Lambda^q\mathfrak{X}(M)$ est entendue comme quotient du produit tensoriel $C^\infty(M)$-linéaire.

Preuve. L'isomorphisme est défini comme suit : si ω est une q-forme et $X_1, ..., X_q$ sont des champs de vecteurs, avec expressions locales

$$\omega\Big|_U = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_q \leq m} \omega_{i_1,...,i_q}\ \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_q},$$

$$X_l\Big|_U = \sum_{i_l=1}^m X_l^{i_l}\ \frac{\partial}{\partial x^{i_l}}, \qquad l = 1, ..., q,$$

alors

$$\omega(X_1, ..., X_q)\Big|_U = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_q \leq m} \omega_{i_1,...,i_q}\ \det\Big(X_l^{i_l}\Big).$$

Pour montrer que c'est bien un isomorphisme, on utilise le fait que $\Gamma(E^*) \cong \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma(E), C^\infty(M))$ dans le cas $T^*M = (TM)^*$. Détails : exo. $\square$

5.7 Definition. Soit $T^{(p,q)}TM$ le fibré tensoriel sur TM. Les sections $\Gamma(T^{(p,q)}TM)$ s'appellent **champs de tenseurs de type** (p,q) **sur** M et on a

$$\Gamma(T^{(p,q)}TM) \;\cong\; \mathfrak{X}(M)^{\otimes p} \otimes_{C^\infty(M)} (\Omega^1(M))^{\otimes q} \;\cong\; \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M)^{\otimes q}, \mathfrak{X}(M)^{\otimes p}).$$

Appellons $\Omega^\bullet(M) = \oplus_{q=0}^m \Omega^q(M)$ l'ensemble de toutes les formes différentielles sur M. Évidemment, $\Omega^\bullet(M)$ est l'espace de sections du fibré $\Lambda^\bullet(M) = \oplus_{q=0}^m \Lambda^q(M)$, et peut être vu comme l'ensemble des applications multilinéaires et antisymmétriques sur $\mathfrak{X}(M)$, i.e.

$$\Omega^\bullet(M) \quad\cong\quad \Gamma(\Lambda^\bullet(M)) \quad\cong\quad \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Lambda^\bullet\mathfrak{X}(M), C^\infty(M)).$$

5.8 Proposition. *Le $C^\infty(M)$-module $\Omega^\bullet(M)$ est une algèbre graduée associative et antisymmétrique (au sense gradué) avec le produit extérieur*

$$\wedge : \Omega^p(M) \otimes \Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^{p+q}(M), \qquad \omega\otimes\eta \mapsto \omega\wedge\eta :\ x \longmapsto \omega_x \wedge \eta_x.$$

L'antisymmétrie au sense gradué signifie que si $\omega \in \Omega^p(M)$ et $\eta \in \Omega^q(M)$, alors

$$\omega\wedge\eta = (-1)^{pq}\eta\wedge\omega.$$

Il est aussi facile de voir que toute q-forme est le produit extérieur (sur $C^\infty(M)$) de 1-formes, i.e. $\Omega^q(M) \cong \Lambda^q\Omega^1(M)$. En effet, pour tout $\omega\in\Omega^q(M)$ il existe un nombre fini de 1-formes $\omega_1^k, ..., \omega_q^k$ telles que $\omega = \sum_k \omega_1^k \wedge\cdots\wedge\omega_q^k$: les formes ω^k sont parmi les différentielles $\mathrm{d}x^i$, eventuellement prises avec des coéfficients (fonctions).

5.3 Transport d'une forme par une application

Soit $\phi : N \longrightarrow M$ une application différentiable (non nécessairement un difféomorphisme).

5.9 Definition. Le **pull back de** ϕ est l'application linéaire $\phi^* : \Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^q(N)$ définie sur $\omega\in\Omega^q(M)$ par

$$(\phi^*\omega)(y) := \Big((\mathrm{d}\phi_y)^* \wedge\cdots\wedge (\mathrm{d}\phi_y)^*\Big)(\omega_{\phi(y)}), \qquad y\in N$$

où $(\mathrm{d}\phi_y)^* : T^*_{\phi(y)}M \longrightarrow T^*_yN$ est l'application adjointe de la différentielle $\mathrm{d}\phi_y : T_yN \longrightarrow T_{\phi(y)}M$, i.e.

$$(\mathrm{d}\phi_y)^*(\omega_{\phi(y)})(Y_y) = \omega_{\phi(y)}(\mathrm{d}\phi_y(Y_y)), \qquad Y_y \in T_yN.$$

Le pull back est utilisé pour restreindre à un ouvert $U\subset M$ une forme définie sur M. Si $i : U \hookrightarrow M$ est l'inclusion, pour toute forme $\omega\in\Omega^q(M)$ on a $i^*(\omega)\in\Omega^q(U)$.

5.10 Exercice. Montrer que le pull back preserve le produit tensoriel et le produit extérieur des formes :

$$\begin{aligned} \phi^*\omega_1 \otimes \phi^*\omega_2 &= \phi^*(\omega_1\otimes\omega_2), \qquad \omega_1,\omega_2\in\Omega^\bullet(M) \\ \phi^*\omega_1 \wedge \phi^*\omega_2 &= \phi^*(\omega_1\wedge\omega_2). \end{aligned}$$

5.11 Remarque. Si $\phi : N \longrightarrow M$ est un difféomorphisme, on appelle **push forward de** ϕ le pull back de ϕ^{-1}, i.e. l'application linéaire $\phi_* : \Omega^q(N) \longrightarrow \Omega^q(M)$ définie sur $\eta\in\Omega^q(N)$ comme

$$(\phi^*\eta)(x) := \Big((\mathrm{d}\phi_y^{-1})^* \wedge\cdots\wedge (\mathrm{d}\phi_y^{-1})^*\Big)(\eta_y), \qquad x\in M, \qquad y = \phi^{-1}(x),$$

où $(\mathrm{d}\phi_y^{-1})^* : T^*_yN \longrightarrow T^*_{\phi(y)}M$ est l'application adjointe de la différentielle inverse $\mathrm{d}\phi_y^{-1} : T_{\phi(y)}M \longrightarrow T_yN$.

5.4 (*) Contraction de formes par un champ de vecteur

Pour tout $x\in M$, il existe un couplage (forme bilinéaire) naturel d'espace vectoriels

$$T^*_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (\omega_x, X_x) \mapsto \omega_x(X_x).$$

Ce couplage s'éteind aux fibrés et aux sections respectives comme application bilinéaire sur $C^\infty(M)$:

$$\Omega^1(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M), \qquad (\omega, X)\mapsto \omega(X) : x \longrightarrow \omega_x(X_x).$$

5.12 Definition. Pour tout champ de vecteurs X, on appelle **contraction par** X l'opération $C^\infty(M)$-linéaire

$$\iota_X : \Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^{q-1}(M), \qquad \omega\mapsto \iota_X(\omega) := \omega(X, ...),$$

où ω est vue comme application $C^\infty(M)$-linéaire sur q champs de vecteurs.

5.13 Proposition. *La contraction donne un isomorphisme de $C^\infty(M)$-modules*

$$\mathfrak{X}(M) \quad\cong\quad \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Omega^q(M), \Omega^{q-1}(M)),\ \ X \longmapsto \iota_X.$$

5.5 (*) Dérivée de Lie des formes différentielles

5.14 Definition. Pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$ on peut définir la **dérivée de Lie par rapport à** X aussi pour les formes différentielles : pour tout $q \geq 0$, c'est l'application $\mathcal{L}_X : \Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^q(M)$ définie sur une forme ω par

$$\mathcal{L}_X(\omega) : a \longrightarrow \mathcal{L}_X(\omega)_x := \lim_{t \to 0} \frac{\big((\phi_t^X)^*\omega\big)_x - \omega_x}{t},$$

où $\phi_t^X : M \longrightarrow M$ est le flot de X et $(\phi_t^X)^* : \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(M)$ est son pull-back.

Soit X le champ de vecteurs avec expression locale $X\Big|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(f) &= Xf, \qquad f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M); \\ \mathcal{L}_X(\omega)\Big|_U &= \sum_{i,j=1}^m \Big(X^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} + \omega_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\Big) \, \mathrm{d}x^i, \qquad \omega \in \Omega^1(M), \qquad \omega\Big|_U = \sum_{i=1}^m \omega_i \, \mathrm{d}x^i. \end{aligned}$$

5.6 Différentielle extérieure ou de de Rham

5.15 Definition. On appelle **différentielle extérieure**, ou **de de Rham**, l'application

$$\mathrm{d} : \Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^{q+1}(M), \quad \omega \mapsto \mathrm{d}\omega, \qquad q \geq 0$$

définie, sur $q+1$ champs de vecteurs $X_k \in \mathfrak{X}(M)$, $k = 1, ..., q+1$ par

$$\mathrm{d}\omega(X_1, ..., X_{q+1}) := \sum_{k=1}^{q+1} (-1)^{k+1} \, X_k \, \omega(X_1, ..., \widehat{X_k}, ..., X_{q+1}) + \sum_{k=1}^{q} \sum_{h=k+1}^{q+1} (-1)^{k+h} \, \omega([X_k, X_h], X_1, ..., \widehat{X_k}, ..., \widehat{X_h}, ..., X_{q+1}),$$

où le symbol ˆ indique qu'on omet le champ. En particulier, pour $q = 0$ on a

$$\mathrm{d} : C^\infty(M) \longrightarrow \Omega^1(M), \qquad \mathrm{d}f(X) = Xf,$$

donc $\mathrm{d}f$ coincide avec la différentielle de f, $\mathrm{d}f : M \longrightarrow T^*M$, $x \mapsto \mathrm{d}f_x$ avec

$$\mathrm{d}f_x : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}, \qquad \mathrm{d}f_x(X_x) = X_x(f) := \sum_{i=1}^m X^i(x) \, \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_x.$$

Pour $q = 1$, on a

$$\mathrm{d} : \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^2(M), \qquad \mathrm{d}\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]).$$

En coordonnées locales, si on a

$$\omega\Big|_U = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_q \leq m} \omega_{i_1,...,i_q} \, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_q}, \qquad \omega_{i_1,...,i_q} \in C^\infty(U),$$

on obtient

$$\mathrm{d}\omega\Big|_U = \sum_{i=1}^m \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_q \leq m} \frac{\partial \omega_{i_1,...,i_q}}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_q}.$$

5.16 Proposition. *La différentielle extérieure a les proprietés suivantes :*

1. d **est $\mathbb{R}$-linéaire** *;*
2. d **est une dérivation graduée** *: si $\omega \in \Omega^p(M)$ et $\eta \in \Omega^q(M)$ on a*
$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}(\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}(\eta);$$
3. d **est une vrai *différentielle* (dérivation de carré nul)** *:* $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ *;*
4. d **commute avec le pull-back** *: si $\phi : N \longrightarrow M$ est une application différentiable et $\phi^* : \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(N)$ est son pull-back, on a*
$$\mathrm{d}(\phi^*\omega) = \phi^*(\mathrm{d}\omega), \qquad \omega \in \Omega^\bullet(M);$$
5. d **commutes avec la dérivée de Lie** *et* **entrelace la dérivée de Lie avec la contraction** *:*
$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(\mathcal{L}_X\omega) = \mathcal{L}_X(\mathrm{d}\omega), \qquad X \in \mathfrak{X}(M), \qquad \omega \in \Omega^\bullet(N); \\ &\mathcal{L}_X\omega = \iota_X(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(\iota_X\omega). \end{aligned}$$

Preuve. Calculs en coordonnées locales. □

5.7 Cohomologie de de Rham, Lemme de Poincaré

5.17 Definition. Puisque $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$, la suite des différentielles extérieures

$$\Omega^0(M) = C^\infty(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^m(M)$$

est un complexe de $C^\infty(M)$-modules, i.e.

$$B^q(M) := \mathrm{Im}\Big(\Omega^{q-1}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^q(M)\Big) \quad \subset \quad Z^q(M) := \mathrm{Ker}\Big(\Omega^q(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{q+1}(M)\Big) \quad \subset \quad \Omega^q(M),$$

qui s'appelle **complexe de de Rham**.

5.18 Definition. Une q-forme ω s'appelle **fermée** si $\mathrm{d}\omega = 0$, i.e. $\omega \in Z^q(M)$, et **exacte** si $\omega = \mathrm{d}\eta$ pour une $q-1$-forme η, i.e. $\omega \in B^q(M)$. Puisque $B^q(M) \subset Z^q(M)$, **une forme exacte est toujours fermée**.

Pour tout $q \geq 1$, on appelle **q-ème cohomologie de** M le quotient de $C^\infty(M)$-modules

$$H^q(M) := Z^q(M)/B^q(M) \;=\; \big\{[\omega],\ \omega \in \Omega^q,\ \mathrm{d}\omega = 0,\ \omega \neq \mathrm{d}\eta,\ \eta \in \Omega^{q-1}(M)\big\},$$

où $[\omega]$ est la classe d'équivalence de la q-forme ω dans la relation d'équivalence

$$\omega \sim \omega' \quad \Longleftrightarrow \quad \omega - \omega' = \mathrm{d}\eta, \quad \eta \in \Omega^{q-1}(M).$$

En somme, $H^q(M)$ mesure combient de q-formes linéairement independantes de M sont fermées et ne sont pas exactes.

5.19 Exemples.

1. Si $M = \mathbb{R}^m$, ou bien $M = U$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^m$, on a $H^q(M) = 0$ pour tout $q \geq 0$: toutes les formes fermées sont exactes.
2. Si $M = \mathbb{S}^m$ est la sphère de dimension m, on a $H^q(M) = 0$ pour tout $0 \leq q \leq m-1$ et $\mathrm{rk}\, H^m(M) = 1$: la classe de m-ième cohomologie non nulle est representée par la forme volume sur la sphère, cf. Section 6.

5.20 Definition. Une varieté différentiable M est **contractile** à un point $x_0 \in M$ s'il existe une application différentiable $h : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$, $\quad (x,t) \mapsto h(x,t)$ telle que

$$h(x,0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad h(x,1) = x, \qquad \text{pour tout } x \in M.$$

5.21 Théorème. (Lemme de Poincaré.) *Si M est contractile, toute q-forme fermée ω sur M est exacte :*

$$\mathrm{d}\omega = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega = \mathrm{d}\eta, \qquad \eta \in \Omega^{q-1}(M) \qquad \textit{i.e.} \qquad H^q(M) = 0, q = 0..., m.$$

Preuve. [Do Carmo "Diff Forms" p.67] □

5.8 Formes différentielles à valeur dans un fibré

5.22 Definition. Pour tout $q \geq 1$, une **q-forme sur** M **à valeur dans** E est une section du fibré $\Lambda^q T^*M \otimes E$. L'ensemble de ces formes est noté $\Omega^q(M;E)$, et on pose aussi $\Omega^0(M;E) = \Gamma(E)$. Enfin, on appelle

$$\Omega^\bullet(M;E) = \oplus_{q=0}^n \Omega^q(M;E)$$

l'ensemble de toutes les formes différentielles sur M à valeurs dans E. Pour tout $q \geq 0$, l'espace $\Omega^q(M;E)$ est un module localement libre de rang $\binom{m}{q} \cdot k$ sur $C^\infty(M)$, et on a

$$\Omega^q(M;E) := \Gamma(\Lambda^q T^*M \otimes E) \cong \Omega^q(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(E).$$

Pour tout $q \geq 0$, la différentielle de de Rham sur M induit une différentielle extérieure sur les formes à valeur dans E : l'application linéaire $\mathrm{d} : \Omega^q(M;E) \longrightarrow \Omega^{q+1}(M;E)$ définie par

$$\mathrm{d}(\omega \otimes s) := \mathrm{d}\omega \otimes s, \qquad \omega \in \Omega^q(M), \qquad s \in \Gamma(E).$$

L'extension de d conserve toutes les proprietés, en particulier $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

Le produit extérieur entre formes différentielles peut être défini pour les formes à valeur dans un fibré E si et seulement si les fibres de E sont des algébres associatives. En particulier, quelconque soit le fibré E, sur les fibres du fibré des endomorphismes $\mathrm{End}\,(E)$ on a la composition d'endomorphismes comme produit associatif. **Le $C^\infty(M)$-module $\Omega^\bullet(M; \mathrm{End}\,(E))$ est une algèbre associative** avec le produit extérieur

$$\wedge : \Omega^p(M; \mathrm{End}\,(E)) \otimes \Omega^q(M; \mathrm{End}\,(E)) \longrightarrow \Omega^{p+q}(M; \mathrm{End}\,(E))$$

défini par

$$(\eta \otimes \varphi) \wedge (\xi \otimes \psi) := (\eta \wedge \xi) \otimes (\varphi \circ \psi).$$

5.23 Exercice. Montrer que l'algèbre $\Omega^\bullet(M; \mathrm{End}\,(E))$ agit sur le $C^\infty(M)$-module $\Omega^\bullet(M;E)$ avec action

$$\wedge : \Omega^p(M; \mathrm{End}\,(E)) \otimes \Omega^q(M;E) \longrightarrow \Omega^{p+q}(M;E)$$

définie par

$$(\eta \otimes \varphi) \wedge (\xi \otimes s) := (\eta \wedge \xi) \otimes \varphi(s).$$

En particulier, pour $q = 0$, on a $(\eta \otimes \varphi) \wedge s = \eta \otimes \varphi(s)$.

6 Connexions sur fibrés vectoriels

Dans cette section, on fixe une varieté différentiable M de dimension m.

6.1 Relevement horizontal sur un fibré

Soit $\pi : N \longrightarrow M$ un fibré de fibre F, où N est une varieté de dimension n et F est une varieté de dimension $n-m=k$. Une section $s : M \longrightarrow N$ se presente localement comme le graphe d'une fonction sur un ouvert de coordonnées de M à valeurs dans un ouvert de coordonnées de F. Néonmoins, la fibre contenant un point $s(x)$ et la fibre contenant un point voisin $s(x')$ ne peuvent pas être comparées directement : le fibré est par définition une union *disjointe* de fibres.

Par exemple, que signifie q'une section $s : M \longrightarrow N$ est "constante" ? L'image de s décrit une sous-varieté $s(M)$ de N difféomorphe à M, qui coupe les fibres N_x de façon transversale. La section est constante si cette coupe est horizontale, mais que signifie "horizontale" ?

Pour étudier les sections de N, il faut éteindre à N le calcul différentiel de M. L'ensemble des différentielles $\mathrm{d}\pi_y : T_yN \longrightarrow T_xM$ relie les fibrés tangents de N et de M. Un "calcul differentiel du fibré" doit naturellement être compatible avec les projections $\mathrm{d}\pi_y$. Autrement dit, ce doit être un "pull back" par π de champs de vecteurs et formes différentielles définis sur M. D'après la Section 5, le pull back sur N par π d'une forme sur M est bien défini : pour tout $q \geq 0$ on a

$$\pi^* : \Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^q(N), \quad (\pi^*\omega)(y) = \Big((\mathrm{d}\pi_y)^* \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}\pi_y)^*\Big)(\omega_x), \qquad \pi(y) = x.$$

On peut donc relever de façon canonique sur N toute forme définie sur M. Il n'en est pas de même pour les champs de vecteurs : d'après la Section 4, le pull back sur N d'un champ sur M peut être défini seulement par un difféomorphisme, et la projection π n'est pas inversible. Ceci empeche de relever à N les champs de vecteurs sur M de façon canonique.

Plus precisement, puisque π est une submersion, pour tout $y \in N$ avec $\pi(y) = x$ la différentielle $\mathrm{d}\pi_y : T_yN \longrightarrow T_xM$ est une application linéaire surjective. Le noyeau $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\pi_y)$ est évidemment donné par l'espace tangent à la fibre, et on a donc une suite courte exacte d'espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow T_yN_x \xrightarrow{\mathrm{d}i_y} T_yN \xrightarrow{\mathrm{d}\pi_y} T_xM \longrightarrow 0, \tag{8}$$

où $\mathrm{d}i_y$ est la différentielle de l'inclusion $i : N_x \hookrightarrow N$. Cette suite exacte admet plusieures sections.

6.1 Definition. Puisque $C^\infty(M) \hookrightarrow C^\infty(N)$, par $f \longmapsto f \circ \pi$, le $C^\infty(N)$-module $\mathfrak{X}(N)$ est aussi un $C^\infty(M)$-module. On appelle **relevement** des champs de vecteurs sur M par $\pi : N \longrightarrow M$ une application $\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(N)$, $X \longmapsto \widetilde{X}$ qui a les proprietés suivantes :

1. Pour tout $x \in M$ et $y \in N_x$ on a $\mathrm{d}\pi_y(\widetilde{X}_y) = X_x$. Ceci est équivalent à dire que $\widetilde{X}$ est une extention de X comme dérivation des fonctions sur M, i.e. pour toute $f \in C^\infty(M)$ on a $\widetilde{X}(f \circ \pi) = Xf \circ \pi$ [abrégé en $\widetilde{X}f = Xf$].
2. L'application $\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(N)$ est $C^\infty(M)$-linéaire, i.e. pour tout $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ et $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ on a $\widetilde{f_1X_1 + f_2X_2} = f_1\widetilde{X_1} + f_2\widetilde{X_2}$.

Sur un ouvert U de M qui supporte une trivialisation τ de N, soient $(y^1, ..., y^n) = (x^1, ..., x^m, z^1, ..., z^k)$ les coordonnées d'un point $y \in N_U$, avec $(x^1, ..., x^m)$ les coordonnées de $x = \pi(y) \in U$ et $(z^1, ..., z^k)$ les coordonnées de $z \in F$ tel que $\tau(y) = (x, z)$. Pour tout $y \in N_U$, une base de T_yN est alors donnée par l'ensemble $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_y, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_y, \frac{\partial}{\partial z^1}\Big|_y, ..., \frac{\partial}{\partial z^k}\Big|_y \right\}$, où $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x,\ i = 1, ..., k \right\}$ est une base de T_xM et $\left\{ \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big|_y,\ \alpha = 1, ..., k \right\}$ est une base de T_yN_x. Il suit que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\pi_y\Big(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big|_y\Big) &= 0, \quad \alpha = 1, ..., k \\ \mathrm{d}\pi_y\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_y\Big) &= \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x, \quad i = 1, ..., m. \end{aligned}$$

6.2 Lemme. *Tout relevement $\widetilde{X}$ sur N de $X \in \mathfrak{X}(M)$ est localement de la forme suivante : si sur U on a $X\Big|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, alors sur N_U on a*

$$y \longmapsto \widetilde{X}_y = \sum_{i=1}^m X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_y + \sum_{\alpha=1}^k \left(\sum_{i=1}^m X^i(x) f_i^\alpha(y) \right) \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big|_y, \qquad \text{où } f_i^\alpha \in C^\infty(N_U). \tag{9}$$

Preuve. En effet, la condition $\mathrm{d}\pi_y(\widetilde{X}_y) = X_{\pi(y)}$ impose les coéfficients X^i au premier terme de droite, et elle est verifiée quels que soient les coéfficients a^α du second terme. Le choix $a^\alpha = \sum_{i=1}^m X^i f_i^\alpha$, par contre, est le seul qui garantit que l'application $X \mapsto \widetilde{X}$ soit $C^\infty(M)$-linéaire, i.e. que $\widetilde{X_1 + X_2} = \widetilde{X_1} + \widetilde{X_2}$ et $\widetilde{gX} = g\widetilde{X}$ pour $g \in C^\infty(M)$. □

Que representent les fonctions $f_i^\alpha \in C^\infty(N_U)$? Pour repondre, reprenons la suite exacte d'espaces vectoriels (8).

6.3 Definition. Pour tout $y \in N$, on appelle **espace vertical** de T_yN le sous-espace vectoriel T_yN_x tangent à la fibre contenant y. On appelle **espace horizontal** de T_yN tout sous-espace vectoriel H_y complementaire de T_yN_x, i.e. tel que

$$T_yN \cong T_yN_x \oplus H_y. \qquad [DESSIN]$$

Tout espace horizontal H_y a dimension m, et il est isomorphe à T_xM via l'application $\mathrm{d}\pi_y$.

Une application $H : y \longmapsto H_y$ s'appelle **champ (différentiable, ou lisse) d'espaces horizontaux** du fibré, ou **connexion de Ehresmann**, si pour tout $y \in N$ l'espace vectoriel H_y est horizontal et s'il existe un recouvrement $\{U\}$ de M tel que sur tout ouvert correspondant N_U de N soient vérifiées les deux conditions équivalentes suivantes :

1. Il existe m champs de vecteurs sur N_U qui engendrent H_y, i.e. il existe $Y_1, ..., Y_m \in \mathfrak{X}(N_U)$ linéairement indépendants et tels que pour tout $y \in N_U$ on a
$$H_y = \mathrm{Span}\big\{(Y_1)_y, ..., (Y_m)_y\big\}.$$
2. Il existe k formes différentielles sur N_U qui annullent H_y, i.e. il existe $\theta^1, ..., \theta^k \in \Omega^1(N_U)$ telles que pour tout $y \in N_U$ on a
$$H_y = \mathrm{Ann}\big(\theta^1_y, ..., \theta^k_y\big) := \Big\{Y_y \in T_yN,\ \theta^\alpha_y(Y_y) = 0,\ \alpha = 1, ..., k\Big\},$$
et les θ^α restreintes à T_yN_x sont linéairement indépendantes.

Avec un abus de notation, on dit que $H = \mathrm{Ann}\big(\theta^1, ..., \theta^k\big)$. Les formes θ^α s'appellent **formes de connexion** de H. Puisque leur restrictions à T_yN_x sont linéairement indépendantes, on a

$$\theta^\alpha_y = \sum_{i=1}^m f^\alpha_i(y)\ \mathrm{d}x^i + \sum_{\beta=1}^k g^\alpha_\beta(y)\ \mathrm{d}z^\beta, \qquad f^\alpha_i, g^\alpha_\beta \in C^\infty(N_U), \tag{10}$$

avec la matrice $\big(g^\alpha_\beta(y)\big)$ inversible sur N_U.

6.4 Lemme. *Pour tout champ d'espaces horizontaux H et pour tout atlas $\{U\}$ de M supportant des trivialisations de N, il existe des fonctions $f^\alpha_i \in C^\infty(N_U)$ telle que les 1-formes*

$$y \quad\longmapsto\quad \theta^\alpha_y = \mathrm{d}z^\alpha + \sum_{i=1}^m f^\alpha_i(y)\ \mathrm{d}x^i, \qquad \alpha = 1, ..., k \tag{11}$$

annullent H sur N_U. Par conséquent, H_y est engendré par les champs de vecteurs

$$y \quad\longmapsto\quad (Y_i)_y = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_y - \sum_{\alpha=1}^k f^\alpha_i(y)\ \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big|_y \qquad i = 1, ..., m. \tag{12}$$

Preuve. On vérifie que $\mathrm{Ann}\big(\theta^1_y, ..., \theta^k_y\big) = \mathrm{Ann}\big(\eta^1_y, ..., \eta^k_y\big)$ si et seulement si pour tout U on a

$$\eta^\alpha\Big|_{N_U} = \sum_{\beta=1}^k h^\alpha_\beta\ \theta^\beta\Big|_{N_U}, \qquad \text{avec} \quad h^\alpha_\beta \in C^\infty(N_U) \quad \text{telles que} \quad \det\big(h^\alpha_\beta(y)\big) \neq 0.$$

Il suit donc que les formes θ^α, qui ont une expression locale donnée par (10), peuvent être amenées à des formes avec expression locale (11) en prenant les fonctions h^α_β telles que $\big(h^\alpha_\beta(y)\big) = \big(g^\alpha_\beta(y)\big)^{-1}$. □

Montrons maintenant que la donnée d'un champ d'espaces horizontaux H est équivalente au choix d'un relevement des champs de vecteurs. Autrement dit, que les coéfficients $f^\alpha_i \in C^\infty(N_U)$ qui apparaissent dans l'Eq. (9) et dans l'Eq. (11) sont bien les mêmes (à moins du signe).

6.5 Proposition. *Il y a une correspondance bijective entre champs d'espaces horizontaux et relevements des champs de vecteurs.*

Preuve. 1) Soit H un champ d'espaces horizontaux fixé, engendré par les champs $Y^i \in \mathfrak{X}(N)$, $i = 1, ..., m$. Pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, qui est localement de la forme $X_U = \sum_{i=1}^m X^i\ \frac{\partial}{\partial x^i}$, on pose

$$\widetilde{X}\Big|_{N_U} := \sum_{i=1}^m X^i\ Y_i.$$

Alors l'application $X \longmapsto \widetilde{X}$ est un relevement de champs de vecteurs. En effet, d'après (12), il existe des fonctions $f^\alpha_i \in C^\infty(U)$ telles que $Y_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{\alpha=1}^k\ f^\alpha_i\ \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$. On a alors

$$\widetilde{X}\Big|_{N_U} = \sum_{i=1}^m X^i\ Y_i = \sum_{i=1}^m X^i\ \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{\alpha=1}^k \left(\sum_{i=1}^m X^i\ f^\alpha_i\right)\ \frac{\partial}{\partial z^\alpha},$$

ce qui montre, d'après l'Eq. (9), que $\widetilde{X}$ est bien un relevement de X.

2) Viceversa, soit $\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(N) : \ X \longmapsto \widetilde{X}$ un relevement fixé. Pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$ et $y \in N$ on a $\widetilde{X}_y \in T_yN$, on pose alors

$$H_y := \Big\{ \widetilde{X}_y \in T_yN, \ X \in \mathfrak{X}(M) \Big\}.$$

Montrons que $H : y \longmapsto H_y$ est un champ de sous-espaces horizontaux.

– Pour tout $y \in N$, H_y est un sous-espace vectoriel de T_yN, car pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ on a $\alpha(\widetilde{X_1})_y + \beta(\widetilde{X_2})_y = \widetilde{X}_y$ si on pose $X = \alpha X_1 + \beta X_2$, donc $\alpha(\widetilde{X_1})_y + \beta(\widetilde{X_2})_y \in H_y$.
– H_y a dimension m, car il est engendré par les vecteurs $\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^i}}\Big|_y$ pour $i = 1, ..., m$. Puisque les champs $\frac{\partial}{\partial x^i}$ engendrent $\mathfrak{X}(M)$ localement, il suffit de montrer que les champs $\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^i}}\Big|_y$ sont linéarement indépendents. En effet, pour tout $\alpha_i \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \alpha_i \widetilde{\frac{\partial}{\partial x^i}}\Big|_y = 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \widetilde{X}_y = 0, \quad \text{avec} \quad X = \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &\Longleftrightarrow \qquad 0 = \mathrm{d}\pi_y\big(\widetilde{X}_y\big) = X_{\pi(y)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha_i = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, ..., m. \end{aligned}$$

– Montrons que $T_yN = T_yN_x \oplus H_y$. Puisque $\dim T_yN_x + \dim H_y = \dim T_yN$, il suffit de montrer que $T_yN_x \cap H_y = \{0\}$. Si $Y_y \in T_yN_x \cap H_y$, on a $Y_y = \widetilde{X}_y$ pour un $X \in \mathfrak{X}(M)$ et aussi $\mathrm{d}\pi_y(Y_y) = 0$. Mais $\mathrm{d}\pi_y\big(\widetilde{X}_y\big) = X_x$, donc $\mathrm{d}\pi_y(Y_y) = 0$ implique que $X_x = 0$ et par conséquent $Y_y = \widetilde{X}_y = 0$.
– Le champ $y \longmapsto H_y$ est différentiable, car par définition il est engendré par des champs.

□

Une fois qu'on a fixé un champ d'espaces horizontaux H, on peut dire si une section $s : M \longrightarrow N$ est horizontale, i.e. "constante", et définir le relevement (horizontale) des courbes sur M.

6.6 Definition. Si H est un champ d'espaces horizontaux, pour tout champ de vecteurs $Y \in \mathfrak{X}(N)$ on appelle **champ vertical** et **champ horizontal** de Y les champs Y^V et Y^H sur N tels que

1. $Y = Y^V + Y^H$;
2. $Y^V_y \in T_yN_x$ et $Y^H_y \in H_y$, pour tout $y \in N$ et $\pi(y) = x$.

Ces champs existent toujours : à partir de Y_y, on défini Y^V_y et Y^H_y par projection de T_yN sur $T_yN_{\pi(y)}$ et sur H_y.

Une section $s : M \longrightarrow N$ s'appelle **horizontale dans la direction de** $X \in \mathfrak{X}(M)$ si on a

$$\mathrm{d}s_x(X_x) \in H_{s(x)}, \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{d}s_x(X_x) = \widetilde{X}_{s(x)}, \qquad \text{pour tout } x \in M. \qquad \text{[DESSIN]}$$

Elle s'appelle **horizontale** si elle l'est dans la direction de tous les champs de vecteurs de M.

6.7 Definition. Soit γ une courbe différentiable sur M parametrée par t. D'après ce qu'on a vu, le relevement sur N des vecteurs tangent $\gamma'(t)$ donne des vecteurs horizontaux $\widetilde{\gamma}'(t) \in H_y \subset T_yN$ en tout point $y \in N_{\gamma(t)}$. On appelle **relevement (horizontal)** de γ sur N la courbe intégrale des vecteurs $\widetilde{\gamma}'(t)$, i.e. la courbe $\widetilde{\gamma}$ sur N, parametrée par $t \longrightarrow y(t)$, telle que $y'(t) = \widetilde{\gamma}'(t)$ pour tout t.

Le relevement de γ existe surment localement, autour de tout point (étant solution d'une équation différentielle du premier ordre). Par contre il n'est pas forcement défini sur tout le domaine de γ : il se peut que $\widetilde{\gamma}$ s'eloigne à l'infini en s'approchant de certeines fibres au dessous desquelles γ est bien définie. Sur un fibré quelconque, la condition que la fibre F soit compacte garantie l'existence du relevement de même domaine. Sur des fibrés vectoriels ou principaux cette condition n'est pas nécessaire.

6.8 Definition. Soit γ une courbe sur M qui joigne deux points $x_1 = \gamma(t_1)$ et $x_2 = \gamma(t_2)$, et qui admet une relevement $\widetilde{\gamma}$ sur N sur l'intervalle $[t_1, t_2]$. On appelle **transport parallèle le long de** γ, entre t_1 et t_2, l'application différentiable

$$N_{x_1} \longrightarrow N_{x_2} : \ y_1 \longmapsto y_2 := \widetilde{\gamma}(t_2) \qquad \text{où } \widetilde{\gamma} \text{ est le relevement de } \gamma \text{ tel que } \widetilde{\gamma}(t_1) = y_1.$$

Le transport parallèle permet enfin de passer d'une fibre à l'autre sur un fibré.

6.2 Connexion sur un fibré vectoriel

À partir de maintenant, on fixe sur M un fibré vectoriel E, de fibre V et rang k.

Pour un fibré vectoriel, un relevement des champs de vecteurs, ou un champ d'espaces horizontaux, ou encore le transport parallèle sur les fibres, doit respecter la structure d'espace vectoriel des fibres. La façon plus commode d'introduire ces concepts est la suivante.

6.9 Definition. Une **connexion** sur E est une application linéaire $\nabla : \mathfrak{X}(M) \otimes \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ notée $(X, s) \longmapsto \nabla_X(s)$, qu'on peut voir également comme application $\nabla : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathrm{End}\,(\Gamma(E))$, avec les proprietés suivantes :

1. Comme application $\nabla : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathrm{End}\,(\Gamma(E))$, elle est $C^\infty(M)$-linéaire, i.e.
$$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad f, g \in C^\infty(M).$$
Par conséquent, pour tout $s \in \Gamma(E)$, l'application $\nabla(s) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Gamma(E),\ X \longmapsto \nabla_X(s)$ est $C^\infty(M)$-linéaire, et peut être vue comme un élément $\nabla(s) \in \Omega^1(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(E)$. Il en resulte que la connexion peut se voir aussi comme une application linéaire $\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M; E)$.
2. Pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, l'application $\nabla_X : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ est une $C^\infty(M)$-dérivation, i.e.
$$\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X(s), \quad f \in C^\infty(M).$$

Rappellons que si $\{e_\alpha, \alpha = 1, ..., k\}$ est une base fixée de V, pour tout ouvert U de M supportant une trivialisation τ_U de E les applications
$$e_\alpha : U \longrightarrow E_U,\ x \longmapsto e_\alpha(x) = \tau^{-1}(x, e_\alpha)$$
forment une base de sections locales de E sur U. Toute section de E sur U s'écrit alors sous la forme
$$s : U \longrightarrow E_U,\ x \longmapsto s(x) = \sum_{\alpha=1}^{k} s^\alpha(x)\ e_\alpha(x), \qquad s^\alpha \in C^\infty(U).$$

6.10 Lemme. *Une connexion ∇ sur E est localement de la forme suivante : si sur U on a $X\Big|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $s\Big|_U = \sum_{\alpha=1}^k s^\alpha\ e_\alpha$, alors*
$$\nabla_X(s)\Big|_U = \sum_{i,\alpha} X^i \Big(\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^i} + \sum_\beta s^\beta\ \Gamma^\alpha_{i\beta}\Big)\ e_\alpha, \qquad \Gamma^\alpha_{i\beta} \in C^\infty(U).$$

Preuve. Puisque $\nabla_X(s) \in \Gamma(E)$, localement il existe surment des fonctions f^α telles que $\nabla_X(s) = \sum_{\alpha=1}^k f^\alpha\ e_\alpha$, calculons-les en utilisant les proprietés qui définissent ∇. Puisque $\nabla_X(s)$ est $C^\infty(M)$-linéaire en X, on a
$$\nabla_X(s) = \sum_{i=1}^m X^i\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(s).$$
Puisque $\nabla_X(s)$ est une $C^\infty(M)$-dérivation en s, on a
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(s) = \sum_{\alpha=1}^k \Big(\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^i}\ e_\alpha + s^\alpha\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(e_\alpha)\Big).$$
Puisque $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(e_\alpha) \in \Gamma(E)$, il existe des fonctions (locales) sur M, appellons-les $\Gamma^\beta_{i\alpha}$, telles que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(e_\alpha) = \sum_{\beta=1}^k \Gamma^\beta_{i\alpha}\ e_\beta$. En conclusion, on a donc
$$\nabla_X(s) = \sum_{i,\alpha} X^i\ \frac{\partial s^\alpha}{\partial x^i}\ e_\alpha + \sum_{i,\alpha,\beta} X^i\ s^\alpha\ \Gamma^\beta_{i\alpha}\ e_\beta = \sum_{i,\alpha} X^i \Big(\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^i} + \sum_\beta s^\beta\ \Gamma^\alpha_{i\beta}\Big)\ e_\alpha.$$
□

6.11 Proposition. *Il y a une correspondance bijective entre connexions et champs d'espaces horizontaux* **linéaires** *sur les fibres de E, c'est-à-dire champs H tels que pour tout $y \in E$, avec $y = \tau^{-1}(x, z) \in E_x$, l'espace vectoriel $H_y \subset T_yE$ depend linéairement de z.*[1]

1. Proprement dit, ceci signifie que si $m_t : E \longrightarrow E$ est la multiplication par $t \in \mathbb{R}$, et $\sigma : E \times_M E \longrightarrow E$ est l'addition, alors
   - $H_{m_t(y)} = (\mathrm{d}m_t)_y(H_y)$ pour tout $y \in E$ et tout $t \in \mathbb{R}$;
   - $(\mathrm{d}\sigma)_y(H_y \boxtimes H_y) = H_y$, où $H_y \boxtimes H_y$ est l'espace horizontal sur $E \times_M E$ induit par H_y.

Preuve. En coordonnées locales, l'équivalence entre connexions et champs linéaires d'espaces horizontaux est évidente : les deux sont défini par des coéfficients

$$f_i^\alpha(y) = \sum_{\beta=1}^k \Gamma_{i\beta}^\alpha(x)\ s^\beta, \qquad \text{pour } y = s(x) = \textstyle\sum_{\beta=1}^k s^\beta(x)\ e_\beta(x),$$

qui sont linéaires dans les coordonnées de la fibre.

Géométriquement, une connexion ∇ sur E définit un champ d'espaces horizontaux H par

$$y \longmapsto H_y = \Big\{ \mathrm{d}s_x(X_x),\ \text{ où } X \in \mathfrak{X}(M) \text{ et } s \in \Gamma(E) \text{ est telle que } s(x) = y \text{ et } \nabla_X(s) = 0 \Big\}.$$

Viceversa, si H est un champ d'espaces horizontaux, pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$ et $s \in \Gamma(E)$, on peux considerer l'application différentiable

$$M \ni x \longmapsto \mathrm{d}s_x(X_x)^V = \mathrm{d}s_x(X_x) - \widetilde{X}_{s(x)} \ \in T_{s(x)}E_x.$$

Puisque E_x est un espace vectoriel, on peut identifier $T_{s(x)}E_x \cong E_x$ par translation de l'origine des vecteurs, $s(x) \mapsto 0$. Cela donne une nouvelle section, $x \longmapsto \mathrm{d}s_x(X_x)^V \in E_x$. Il en resulte une application $\nabla : \mathfrak{X}(M) \otimes \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ définie par $\nabla_X(s)(x) = \mathrm{d}s_x(X_x)^V$. Le fait que $H_{s(x)}$ depend linéairement de la fibre garantit que ∇ soit une connexion. □

Puisque l'application $\nabla_X : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ n'est pas $C^\infty(M)$-linéaire (c'est une dérivation), elle n'est pas induite par un morphisme de fibrés $E \longrightarrow E$. Par contre, l'application $\nabla : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathrm{End}\,(\Gamma(E))$ est bien $C^\infty(M)$-linéaire et pourrait venir d'un morphisme de fibrés, sauf que $\mathrm{End}\,(\Gamma(E))$ n'est pas l'espace de sections d'un fibré (il contient strictement l'espace $\Gamma(\mathrm{End}\,E) = \mathrm{End}_{C^\infty(M)}(\Gamma(E))$).

6.12 Proposition. *La différence entre deux connexions est une application* $A : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathrm{End}\,(\Gamma(E))$ *à valeurs dans* $\mathrm{End}_{C^\infty(M)}(\Gamma(E)) = \Gamma(\mathrm{End}\,E)$*. C'est donc le push forward d'un morphisme de fibrés, autrement dit*

$$A \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}\Big(\mathfrak{X}(M), \Gamma(\mathrm{End}\,E)\Big) \cong \Omega^1(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(\mathrm{End}\,E) = \Omega^1(M; \mathrm{End}\,E).$$

Par conséquent, l'ensemble des connexions sur E est un espace affine : il est isomorphe à $\Omega^1(M; \mathrm{End}\,E)$ une fois qu'on a fixé une connexion ∇_0.

Preuve. Si ∇ et ∇' sont deux connexions sur E, et $A = \nabla - \nabla'$, alors pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, pour toute $f \in C^\infty(M)$ et pour toute $s \in \Gamma(E)$, on a $A_X(fs) = X(f) + f\nabla_X(s) - X(f) - f\nabla'_X(s) = f(\nabla_X - \nabla'_X)(s)$.
Donc, pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, l'application $A_X : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ est le push forward d'un morphisme $E \longrightarrow E$, autrement dit $A : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{End}\,E)$ provient d'un morphisme de fibrés

$$TM \otimes E \longrightarrow E \quad \Longleftrightarrow \quad E \longrightarrow T^*M \otimes E \quad \Longleftrightarrow \quad TM \longrightarrow \mathrm{End}\,E \quad \Longleftrightarrow \quad T^*M \otimes \mathrm{End}\,E.$$

□

En coordonnées locales : En somme, on a la situation suivante. Sur une carte (U, φ) de M avec coordonnées $(x^1, ..., x^m)$ et supportant une base $\{e_\alpha,\ \alpha = 1, ..., k\}$ de sections locales de E :

– On appelle **symboles de Christoffel** les fonctions $\Gamma_{i\beta}^\alpha \in C^\infty(U)$ telles que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(e_\beta) = \sum_\alpha \Gamma_{i\beta}^\alpha\ e_\alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nabla(e_\beta) = \sum_{i,\alpha} \Gamma_{i\beta}^\alpha\ \mathrm{d}x^i \otimes e_\alpha.$$

– On appelle **matrice de connexion** la 1-forme $\omega \in \Omega^1(M; \mathrm{End}\,E)$ qui est localement une matrice $\omega\Big|_U = (\omega_\beta^\alpha)$ avec coéfficients

$$\omega_\beta^\alpha := \sum_i \Gamma_{i\beta}^\alpha\ \mathrm{d}x^i \in \Omega^1(U).$$

On a alors

$$\nabla(e_\beta) = \sum_\alpha \omega_\beta^\alpha \otimes e_\alpha.$$

– Pour toute section $s = \sum s^\alpha e_\alpha \in \Gamma(E)$, on appelle **forme de connexion de** s la forme $\theta(s) := (\theta^\alpha(s)) \in \Omega^1(M; E)$, où

$$\theta^\alpha(s) := \mathrm{d}s^\alpha + \sum_\beta \omega_\beta^\alpha s^\beta \in \Omega^1(M) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \theta(s) = \mathrm{d}s + \omega(s)$$

Pour $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(M)$ on a alors

$$\nabla_X(s) = \sum_{i,\alpha} X^i \Big(\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^i} + \sum_\beta s^\beta \Gamma_{i\beta}^\alpha \Big)\ e_\alpha,$$

$$\nabla(s) = \sum_{i,\alpha} \Big(\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^i} + \sum_\beta \Gamma_{i\beta}^\alpha\ s^\beta \Big)\ \mathrm{d}x^i \otimes e_\alpha = \sum_\alpha \Big(\mathrm{d}s^\alpha + \sum_\beta \omega_\beta^\alpha\ s^\beta \Big) \otimes e_\alpha = \sum_\alpha \theta^\alpha(s) \otimes e_\alpha.$$

– L'application $\nabla^0 : \mathfrak{X}(M) \otimes \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ définie par

$$\nabla^0_X(s) := X(s) := \sum_{\alpha=1}^{k} X(s^\alpha)\ e_\alpha,$$

est une connexion, qui s'appelle **connexion plate standard**. Cette connexion existe seulement quand on a une base de sections globales de E, c'est-à-dire quand le fibré est trivial. Dans ce cas, toute connexion ∇ sur $E = M \times V$ s'écrit comme $\nabla = \nabla^0 + \omega$, où $\omega \in \Omega^1(M; \mathrm{End}\, E)$ est la matrice de connexion.

6.3 Transport parallèle et holonomie

Une connexion ∇ sur E fixe le relèvement horizontal des vecteurs tangents à M. En particulier, si $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ est une courbe regulière, on dit qu'une section $s \in \Gamma(E)$ est **parallèle le long de** γ si elle est horizontale dans la direction de $\gamma'(t)$, pour tout $t \in I$, i.e. si

$$\nabla_{\gamma'(t)}(s) = 0, \qquad t \in I.$$

La connexion induit donc aussi le transport parallèle sur les fibres de E. Si γ est une courbe différentiable sur M reliant les points $x_1 = \gamma(t_1)$ et $x_2 = \gamma(t_2)$, on a une application $P^\nabla_\gamma : E_{x_1} \longrightarrow E_{x_2}$ qui suit le relèvement horizontal de γ le long des fibres, i.e.

$$P^D_\gamma(y_1) = y_2 \quad \Longleftrightarrow \quad y_2 = s(x_2), \quad \text{où } s \in \Gamma(E) \text{ est telle que } s(x_1) = y_1 \text{ et } \nabla_{\gamma'(t)}(s) = 0 \text{ pour tout } t \in [t_1, t_2].$$

Sur un fibré vectoriel, puisque la connexion ∇ est linéaire sur les fibres, le transport parallèle est une application linéaire sur les fibres, et il est donc défini pour toutes les courbes différentiables sur M. De plus, le transport parallèle est un isomorphisme sur les fibres. Mais en général il depend du choix de la courbe γ, et n'est donc pas canonique.

Si γ est une courbe sur M différentiable *par morceaux*, on peut définir le transport parallèle entre deux fibres quelconques en composant les transports parallèles le long de chaque morceau différentiable.

6.13 Definition. Soit $\gamma : I \longrightarrow M$ un **lacet**, c'est-à-dire une courbe fermée, différentiable par morceaux. Pour tout $x = \gamma(t)$, le transport parallèle le long de γ défini un automorphisme $P^\nabla_\gamma \in \mathrm{Aut}\,(E_x)$ qui en général n'est pas trivial. Autrement dit, le transport parallèle le long d'un lacet ne ramene pas forcement un vecteur de E_x en lui-même. [DESSIN : lacet sur $\mathbb{S}^2$ entre les deux pôles.]

On appelle **groupe d'holonomie** de ∇ en x l'ensemble

$$\mathrm{Hol}_x(\nabla) := \big\{ P^\nabla_\gamma \in \mathrm{Aut}\,(E_x) \mid \gamma \text{ est un lacet passant par } x\ \big\},$$

et **groupe restreint d'holonomie** le sous-groupe

$$\mathrm{Hol}^0_x(\nabla) := \big\{ P^\nabla_\gamma \in \mathrm{Aut}\,(E_x) \mid \gamma \text{ est un lacet contractile passant par } x\ \big\}.$$

6.4 Dérivée et différentielle covariante

Soit ∇ une connexion fixée sur E.

6.14 Definition. Pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, on appelle $\nabla_X : \Gamma(s) \longrightarrow \Gamma(s)$ la **dérivée covariante dans la direction de** X. En particulier, la dérivée covariante le long d'une courbe $t \mapsto \gamma(t)$, est la dérivée covariante dans la direction de $\gamma'(t)$, et s'indique avec le symbol

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\dot\gamma(t)} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E), \qquad s \longmapsto \frac{\nabla s}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\gamma'(t)}(s(t)),$$

où $s(t) = (s \circ \gamma)(t)$ est la restriction de s a la courbe γ.

La dérivée covariante est l'analogue pour les sections de E de la derivée usuelle pour les fonctions réelles (ou, mieux, de la différentielle). Par exemple, une section de E est constante le long de γ si $\frac{\nabla s}{\mathrm{d}t}(\gamma(t)) = 0$.

6.15 Definition. La **différentielle** (ou **dérivée extérieure**) **covariante** est l'extension de la dérivée covariante $\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M; E)$ aux formes de degré superieur, c'est-à-dire, pour tout $q \geq 1$, l'application linéaire

$$\nabla : \Omega^q(M; E) \longrightarrow \Omega^{q+1}(M; E)$$

définie par

$$\nabla(\eta \otimes s) := \mathrm{d}\eta \otimes s + (-1)^q \eta \wedge \nabla(s), \quad \eta \in \Omega^q(M), \quad s \in \Gamma(E).$$

Elle satisfait la règle de Leibniz suivante :

$$\nabla(fS) = \mathrm{d}f \wedge S + f\nabla(S), \quad f \in C^\infty(M), \quad S \in \Omega^q(M; E).$$

Attention : en général $\nabla^2 \neq 0$.

En coordonnées locales :

$$\nabla(e_\beta) = \sum_{i,\alpha} \Gamma^\alpha_{i\beta}\ \mathrm{d}x^i \otimes e_\alpha = \omega^\alpha_\beta \otimes e_\alpha$$

$$\nabla(\mathrm{d}x^i \otimes e_\beta) = -\sum_{j,\alpha} \Gamma^\alpha_{j\beta}\ \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \otimes e_\alpha = -\sum_\alpha \mathrm{d}x^i \wedge \omega^\alpha_\beta \otimes e_\alpha$$

$$\nabla(\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \otimes e_\beta) = \sum_{k,\alpha} \Gamma^\alpha_{k\beta}\ \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \otimes e_\alpha = \sum_\alpha \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \omega^\alpha_\beta \otimes e_\alpha.$$

Pour $s = \sum s^\alpha e_\alpha \in \Gamma(E)$, $\eta = \sum \eta_i\ \mathrm{d}x^i \in \Omega^1(M)$ et $\xi = \sum \xi_{ij}\ \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \in \Omega^2(M)$ on a

$$\nabla(s) = \sum_{i,\alpha} \Big(\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^i} + \sum_\beta\ \Gamma^\alpha_{i\beta}\ s^\beta \Big)\ \mathrm{d}x^i \otimes e_\alpha = \sum_{\alpha,\beta} (\mathrm{d}s^\alpha + \omega^\alpha_\beta\ s^\beta) \otimes e_\alpha = \sum_\alpha \theta^\alpha(s) \otimes e_\alpha,$$

$$\nabla(\eta \otimes s) = \mathrm{d}\eta \otimes s - \sum_\alpha\ \eta \wedge \theta^\alpha(s) \otimes e_\alpha = \sum_{i,j,\alpha} \Big(\frac{\partial \eta_j}{\partial x^i} s^\alpha - \eta_i \Big(\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^j} + \sum_\beta\ \Gamma^\alpha_{j\beta}\ s^\beta \Big)\Big) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \otimes e_\alpha,$$

$$\nabla(\xi \otimes s) = \mathrm{d}\xi \otimes s + \sum_\alpha\ \xi \wedge \theta^\alpha(s) \otimes e_\alpha = \sum_{i,j,k,\alpha} \Big(\frac{\partial \xi_{ij}}{\partial x^k} s^\alpha + \xi_{ij} \Big(\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^k} + \sum_\beta\ \Gamma^\alpha_{k\beta}\ s^\beta \Big)\Big) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \otimes e_\alpha.$$

6.5 Courbure d'une connexion

6.16 Definition. La **courbure** d'une connexion ∇ est l'application $R : \Lambda^2(\mathfrak{X}(M)) \otimes \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$, ou également l'application $R : \Lambda^2\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathrm{End}\,(\Gamma(E))$, définie pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ par

$$R(X,Y) := [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}.$$

En particulier, R est évidemment antisymmétrique en X et Y.

6.17 Proposition. *La courbure satisfait aux proprietés suivantes :*

1. *Comme application $R : \Lambda^2(\mathfrak{X}(M)) \longrightarrow \mathrm{End}\,(\Gamma(E))$, elle est $C^\infty(M)$-bilinéaire :*

$$R(X+X',Y) = R(X,Y) + R(X',Y) \quad \textit{et} \quad R(X,Y+Y') = R(X,Y) + R(X,Y')$$
$$R(fX,Y) = R(X,fY) = fR(X,Y), \quad f \in C^\infty(M).$$

2. *Pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, l'application $R(X,Y) : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ est $C^\infty(M)$-linéaire :*

$$R(X,Y)(s+s') = R(X,Y)s + R(X,Y)s', \quad s, s' \in \Gamma(E)$$
$$R(X,Y)(fs) = fR(X,Y)s, \quad f \in C^\infty(M).$$

Par conséquent, la courbure $R : \Lambda^2\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathrm{End}\,(\Gamma(E))$ est une application $C^\infty(M)$-linéaire à valeur dans $\mathrm{End}_{C^\infty(M)}(\Gamma(E)) = \Gamma(\mathrm{End}\,E)$: elle provient donc d'un morphisme de fibrés, autrement dit

$$R \in \Omega^2(M; \mathrm{End}\,E) = \Omega^2(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(\mathrm{End}\,E).$$

Preuve. Calculs très faciles. □

En coordonnées locales :

– Pour $i, j = 1, ..., m$ et $\alpha, \beta = 1, ..., k$, on appelle **coéfficients de courbure** les fonctions $R^\alpha_{ij,\beta} \in C^\infty(U)$ telles que :

$$R\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big)(e_\beta) = \sum_\alpha\ R^\alpha_{ij,\beta}\ e_\alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad R(e_\beta) = \sum_{i<j,\alpha} R^\alpha_{ij,\beta}\ \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \otimes e_\alpha.$$

– On appelle **matrice de courbure** la 2-forme $\Omega \in \Omega^2(M; \mathrm{End}\,E)$ qui est localement une matrice $\Omega\Big|_U = (\Omega^\alpha_\beta)$ avec coéfficients

$$\Omega^\alpha_\beta := \sum_{i<j}\ R^\alpha_{ij,\beta}\ \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \in \Omega^2(U).$$

On a alors $\quad R(e_\beta) = \sum_\alpha\ \Omega^\alpha_\beta \otimes e_\alpha$.

– Pour $s = \sum s^\alpha e_\alpha \in \Gamma(E)$ et $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(M)$ on a

$$R(X,Y)(s) = \sum_{\substack{i<j\\ \alpha,\beta}}\ [X^i, Y^j]\ R^\alpha_{ij,\beta}\ s^\beta\ e_\alpha,$$

$$R(s) = \sum_{\substack{i<j\\ \alpha,\beta}} R^\alpha_{ij,\beta}\ s^\beta\ \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \otimes e_\alpha = \sum_{\alpha,\beta}\ s^\beta\ \Omega^\alpha_\beta \otimes e_\alpha.$$

6.18 Proposition. *La matrice de courbure est liée à la matrice de connexion par l'équation structurelle de Cartan :*

$$\Omega^\alpha_\beta = \mathrm{d}\omega^\alpha_\beta + \sum_\gamma \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta, \qquad \textit{ou également} \qquad \Omega = \mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega$$

$$\textit{ou encore} \qquad R^\alpha_{ij,\beta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{j\beta}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{i\beta}}{\partial x^j} + \sum_\gamma \Big(\Gamma^\alpha_{i\gamma}\Gamma^\gamma_{j\beta} - \Gamma^\alpha_{j\gamma}\Gamma^\gamma_{i\beta} \Big).$$

Par conséquence, elles satisfons l'identité de Bianchi :

$$\mathrm{d}\Omega^\alpha_\beta = \sum_\gamma \Big(\Omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta - \omega^\alpha_\gamma \wedge \Omega^\gamma_\beta \Big), \qquad \textit{ou également} \qquad \mathrm{d}\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega =: [\ \Omega \overset{\wedge}{,} \omega\ ].$$

Preuve. Exo. □

6.19 Corollaire. *La courbure de ∇, vue comme élément $R \in \Omega^2(M; \mathrm{End}\, E)$, agit sur les formes $\Omega^\bullet(M;E)$ et mesure le défaut de la dérivée covariante $\nabla : \Omega^*(M;E) \longrightarrow \Omega^{*+2}(M;E)$ d'être une différentielle : $R = \nabla^2$. Cela signifie que :*

$$\begin{aligned} &\nabla^2(s) = R \wedge s = R(s), \quad s \in \Gamma(E) = \Omega^0(M;E) \\ &\nabla^2(\eta \otimes s) = R \wedge (\eta \otimes s), \qquad \eta \otimes s \in \Omega^q(M;E), \quad q \geq 1. \end{aligned}$$

Preuve. Calculons $\nabla^2(s)$ en coordonnées, avec $s = \sum_\alpha s^\alpha\, e_\alpha$:

$$\begin{aligned} \nabla^2(s) &= \sum_\alpha \nabla\Big(\mathrm{d}s^\alpha \otimes e_\alpha\Big) + \sum_{\alpha,\beta} \nabla\Big(s^\beta \omega^\alpha_\beta \otimes e_\alpha\Big) \\ &= \sum_\alpha \mathrm{d}^2 s^\alpha \otimes e_\alpha - \sum_\beta \mathrm{d}s^\beta \wedge \nabla e_\beta + \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{d}\big(s^\beta \omega^\alpha_\beta\big) \otimes e_\alpha - \sum_{\beta,\gamma} s^\beta \omega^\gamma_\beta \wedge \nabla e_\gamma \\ &= -\sum_{\alpha,\beta} \mathrm{d}s^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta \otimes e_\alpha + \sum_{\alpha,\beta} \Big(\mathrm{d}s^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta + s^\beta \mathrm{d}\omega^\alpha_\beta\Big) \otimes e_\alpha - \sum_{\alpha,\beta,\gamma} s^\beta \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma \otimes e_\alpha \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \Big(- \mathrm{d}s^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta + \mathrm{d}s^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta + s^\beta \mathrm{d}\omega^\alpha_\beta - \sum_\gamma s^\beta \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma \Big) \otimes e_\alpha \\ &= \sum_{\alpha,\beta} s^\beta \Big(\mathrm{d}\omega^\alpha_\beta + \sum_\gamma \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta \Big) \otimes e_\alpha = \sum_{\alpha,\beta} s^\beta\ \Omega^\alpha_\beta \otimes e_\alpha = R(s). \end{aligned}$$

Le même type de calculs montre la seconde identité. □

6.20 Definition. Une connexion ∇ sur E s'appelle **plate** si sa courbure est nulle.

On peut montrer aussi que la courbure mesure l'holonomie le long de lacets infinitesimaux. Par conséquent, une connexion ∇ est plate si et seulement si pour tout $x \in M$ on a $\mathrm{Hol}^0_x(\nabla) = 0$. [Baez p.247]

6.6 Identité de Bianchi en version covariante

6.21 Proposition. *La connexion ∇ sur E induit une connexion $\widehat{\nabla}$ sur* $\mathrm{End}\, E \cong E \otimes E^*$*,*

$$\widehat{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \otimes \Gamma(\mathrm{End}\, E) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{End}\, E) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \widehat{\nabla} : \Gamma(\mathrm{End}\, E) \longrightarrow \Omega^1(M; \mathrm{End}\, E)$$

définie, sur $X \in \mathfrak{X}(M)$ et $\varphi \in \mathrm{End}\, E$, par

$$\widehat{\nabla}_X(\varphi)(s) = \nabla_X\big(\varphi(s)\big) - \varphi\big(\nabla_X(s)\big), \qquad s \in \Gamma(E).$$

Preuve. Il faut montrer que $\widehat{\nabla}$ satisfait les deux proprietés qui definissent les connexions :

$$\begin{aligned} &\widehat{\nabla}_{fX+gY} = f\widehat{\nabla}_X + g\widehat{\nabla}_Y, \qquad f,g \in \mathbb{C}^\infty(M), \qquad X,Y \in \mathfrak{X}(M), \\ &\widehat{\nabla}_X(f\varphi) = Xf + f\widehat{\nabla}_X(\varphi), \qquad X \in \mathfrak{X}(M), \qquad f \in \mathbb{C}^\infty(M), \qquad \varphi \in \Gamma(\mathrm{End}\, E). \end{aligned}$$

Il suffit de calculer tous ces termes sur un $\varphi \in \Gamma(\mathrm{End}\, E)$ et une $s \in \Gamma(E)$. □

En coordonnées locales : Fixons une base locale de sections de $\mathrm{End}\, E$, donnée par l'ensemble $\{e_\alpha \otimes e^\beta,\ \alpha,\beta = 1,...,k\}$, où $e^\beta = e^*_\beta$ est tel que $e^\beta(e_\alpha) = \delta^\beta_\alpha$, et une carte de M avec coordonnées $(x^1,...,x^m)$.

– Les **symboles de Christoffel de** $\widehat{\nabla}$ sont

$$\widehat{\Gamma}^{\beta\gamma}_{i\alpha\gamma'} = \delta^\beta_{\gamma'}\ \Gamma^\gamma_{i\alpha} - \delta^\gamma_\alpha\ \Gamma^\beta_{i\gamma'}.$$

– La **matrice de connexion** $\widehat{\omega} = \left(\widehat{\omega}_{\alpha\gamma'}^{\beta\gamma}\right) \in \Omega^1(M; \mathrm{End}\,(\mathrm{End}\,E))$ est donnée par

$$\widehat{\omega}_{\alpha\gamma'}^{\beta\gamma} = \delta_{\gamma'}^{\beta}\ \omega_{\alpha}^{\gamma} - \delta_{\alpha}^{\gamma}\ \omega_{\gamma'}^{\beta}.$$

Pour $\varphi(e_\beta) = e_\alpha$, i.e. $\varphi = e_\alpha \otimes e_\beta^*$ on a donc

$$\widehat{\nabla}(e_\alpha \otimes e^\beta) = \sum_{\gamma,\gamma'} \widehat{\omega}_{\alpha\gamma'}^{\beta\gamma}\ e_\gamma \otimes e^\gamma = \sum_\gamma \omega_\alpha^\gamma \otimes e_\gamma \otimes e^\beta - \sum_\gamma \omega_\gamma^\beta \otimes e_\alpha \otimes e^\gamma.$$

– Pour $\varphi(e_\beta) = \sum_\alpha \varphi_\beta^\alpha\ e_\alpha$, i.e. $\varphi = \sum_{\alpha,\beta} \varphi_\beta^\alpha\ e_\alpha \otimes e^\beta$, la **forme de connexion** $\widehat{\theta}(\varphi) = \left(\widehat{\theta}_\alpha^\beta(\varphi)\right) \in \Omega^1(M, \mathrm{End}\,E)$ est donnée par

$$\widehat{\theta}_\beta^\alpha(\varphi) = \mathrm{d}\varphi_\beta^\alpha + \sum_{\gamma,\gamma'} \widehat{\omega}_{\alpha\gamma'}^{\beta\gamma}\ \varphi_\beta^\alpha = \mathrm{d}\varphi_\beta^\alpha + \sum_\gamma \left(\omega_\gamma^\alpha\ \varphi_\beta^\gamma - \varphi_\gamma^\alpha\ \omega_\beta^\gamma\right) \in \Omega^1(M), \qquad \text{ou également}$$

$$\widehat{\theta}(\varphi) = \mathrm{d}\varphi + \omega \circ \varphi - \varphi \circ \omega = \mathrm{d}\varphi + [\omega, \varphi]$$

On a alors

$$\widehat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\varphi)(e_\beta) = \sum_\alpha \Big[\frac{\partial \varphi_\beta^\alpha}{\partial x^i} + \sum_\gamma \left(\Gamma_{i\gamma}^\alpha\ \varphi_\beta^\gamma - \varphi_\gamma^\alpha\ \Gamma_{i\beta}^\gamma\right)\Big] e_\alpha$$

$$\widehat{\nabla}(\varphi)(e_\beta) = \sum_{i,\alpha} \Big[\frac{\partial \varphi_\beta^\alpha}{\partial x^i} + \sum_\gamma \left(\Gamma_{i\gamma}^\alpha\ \varphi_\beta^\gamma - \varphi_\gamma^\alpha\ \Gamma_{i\beta}^\gamma\right)\Big] \mathrm{d}x^i \otimes e_\alpha = \sum_\alpha \Big[\mathrm{d}\varphi_\beta^\alpha + \sum_\gamma \left(\omega_\gamma^\alpha\ \varphi_\beta^\gamma - \varphi_\gamma^\alpha\ \omega_\beta^\gamma\right)\Big] \otimes e_\alpha$$

$$\widehat{\nabla}(\varphi) = \sum_{\alpha,\beta} \Big[\mathrm{d}\varphi_\beta^\alpha + \sum_\gamma \left(\omega_\gamma^\alpha\ \varphi_\beta^\gamma - \varphi_\gamma^\alpha\ \omega_\beta^\gamma\right)\Big] \otimes e_\alpha \otimes e_\beta^* = \sum_{\alpha,\beta} \widehat{\theta}_\beta^\alpha(\varphi) \otimes e_\alpha \otimes e_\beta^*.$$

En conclusion, pour $s = \sum_\beta s^\beta e_\beta$, et $\varphi(s) = \sum_{\alpha,\beta} s^\beta \varphi_\beta^\alpha e_\alpha$, on a

$$\widehat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\varphi)(s) = \sum_{\alpha,\beta} s^\beta \Big[\frac{\partial \varphi_\beta^\alpha}{\partial x^i} + \sum_\gamma \left(\varphi_\beta^\gamma \Gamma_{i\gamma}^\alpha - \Gamma_{i\beta}^\gamma \varphi_\gamma^\alpha\right)\Big] e_\alpha$$

$$\widehat{\nabla}(\varphi)(s) = \sum_{i,\alpha,\beta} s^\beta \Big[\frac{\partial \varphi_\beta^\alpha}{\partial x^i} + \sum_\gamma \left(\varphi_\beta^\gamma \Gamma_{i\gamma}^\alpha - \Gamma_{i\beta}^\gamma \varphi_\gamma^\alpha\right)\Big] \mathrm{d}x^i \otimes e_\alpha.$$

6.22 Corollaire. *Par conséquent, la connexion ∇ sur E induit sur $\mathrm{End}\,E$ aussi une differentielle covariante*

$$\widehat{\nabla} : \Omega^q(M; \mathrm{End}\,E) \longrightarrow \Omega^{q+1}(M; \mathrm{End}\,E), \qquad \textit{pour tout } q \geq 1,$$

définie, sur $\eta \in \Omega^q(M)$ et $\varphi \in \Gamma(\mathrm{End}\,E)$, par

$$\widehat{\nabla}(\eta \otimes \varphi) = \mathrm{d}\eta \otimes \varphi + (-1)^q \eta \wedge \widehat{\nabla}(\varphi).$$

Attention : $\widehat{\nabla}^2 \neq 0$ en général.

En coordonnées locales : Pour $\varphi(e_\beta) = \sum_\alpha \varphi_\beta^\alpha\ e_\alpha$, i.e. $\varphi = \sum_{\alpha,\beta} \varphi_\beta^\alpha\ e_\alpha \otimes e_\beta^*$, on a :

$$\widehat{\nabla}^2(\varphi) = \sum_{\alpha,\beta} \Big[\mathrm{d}\widehat{\theta}_\beta^\alpha(\varphi) + \sum_\gamma \left(\omega_\gamma^\alpha \wedge \widehat{\theta}_\beta^\gamma(\varphi) + \widehat{\theta}_\gamma^\alpha(\varphi) \wedge \omega_\beta^\gamma\right)\Big] \otimes e_\alpha \otimes e_\beta^*,$$

Pour $\eta \in \Omega^q(M)$ et $\varphi(s) = \sum_{\alpha,\beta} s^\beta \varphi_\beta^\alpha e_\alpha$ on a :

$$\widehat{\nabla}(\eta \otimes \varphi) = \mathrm{d}\eta \otimes \varphi + (-1)^q \eta \wedge \widehat{\nabla}(\varphi) = \mathrm{d}\eta \otimes \varphi + (-1)^q \sum_{\alpha,\beta} \eta \wedge \theta_\beta^\alpha(\varphi) \otimes e_\alpha \otimes e_\beta^*$$

$$\widehat{\nabla}^2(\eta \otimes \varphi) = \sum_{\alpha,\beta} \eta \wedge \mathrm{d}\theta_\beta^\alpha(\varphi) \otimes e_\alpha \otimes e_\beta^*.$$

6.23 Proposition. *Comme la courbure de ∇ est une 2-forme $R \in \Omega^2(M; \mathrm{End}\,E)$, on peut calculer $\widehat{\nabla}$ sur R, et on obtient l'identité de Bianchi en version covariante :*

$$\widehat{\nabla} R = 0.$$

Preuve. En coordonnées locales, on a $R = \sum_{\alpha,\beta} \Omega_\beta^\alpha \otimes e_\alpha \otimes e_\beta^*$ où $\Omega_\beta^\alpha = \sum_{i<j} R_{ij,\beta}^\alpha\ \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$. Calculons

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}(R) &= \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{d}\Omega_\beta^\alpha \otimes e_\alpha \otimes e_\beta^* + \sum_{\alpha,\beta} \Omega_\beta^\alpha \wedge \widehat{\nabla}(e_\alpha \otimes e_\beta^*) \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \Big[\mathrm{d}\Omega_\beta^\alpha - \sum_\gamma \left(\Omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma - \omega_\gamma^\alpha \wedge \Omega_\beta^\gamma\right)\Big] \otimes e_\alpha \otimes e_\beta^*. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité de Bianchi $\mathrm{d}\Omega_\beta^\alpha = \sum_\gamma \left(\Omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma - \omega_\gamma^\alpha \wedge \Omega_\beta^\gamma\right)$, on obtient donc $\widehat{\nabla}(R) = 0$. $\square$

7 Varietés orientables et intégration

7.1 Partition de l'unité

Localement, toute varieté différentiable est un ouvert d'un $\mathbb{R}^m$. Globalement, toute structure sur la varieté est un recollement d'objets définis localement sur ces ouverts. Ce recollement se fait avec une partition de l'unité. Nous montrons dans ce paragraphe que la partition de l'unité existe toujours, et nous l'utilisons ensuite pour définir une forme volume (ou également une orientation), l'intégration, et une métrique riemannienne sur toute varieté.

7.1 Definition. Le **support** d'une fonction f sur M est l'ensemble

$$\operatorname{supp} f := \mathcal{F}\Big(\{x \in M,\ f(x) \neq 0\}\Big),$$

où $\mathcal{F}(D)$ indique la fermeture topologique de l'ensemble D, c'est-à-dire le plus petit ensemble fermé contenant D.

7.2 Definition. Une **partition de l'unité** sur une varieté M est une famille de fonctions différentiables $p_j : M \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $j \in \mathbb{N}$, telles que

1. pour tout $x \in M$, l'ensemble des fonctions p_j telles que $p_j(x) \neq 0$ est fini ;
2. pour tout j, le support $\operatorname{supp} p_j$ est compact ;
3. pour tout j et tout $x \in \operatorname{supp} p_j$, on a $0 \leq p_j(x) \leq 1$;
4. pour tout $x \in M$, on a $\displaystyle\sum_j p_j(x) = 1$. Ceci implique que l'ensemble $\{\operatorname{supp} p_j\}$ soit un recouvrement de M.

Une partition de l'unité $\{p_j\}$ est **subordinée** à un atlas $\{(U_r, \phi_r)\}$ de M si pour tout j il existe un r_j tel que $\operatorname{supp} p_j \subset U_{r_j}$.

7.3 Théorème. *Si M est une varieté de Hausdorff et paracompacte (et admet donc un recouvrement localement fini), alors pour tout atlas de M localement fini il existe une partition de l'unité subordinée à l'atlas.*

7.4 Lemme. *Soient $A, B \subset \mathbb{R}^m$ deux ensembles disjoints fermés, et avec A borné. Il existe une fonction q de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^m$ telle que*

$$0 \leq q \leq 1 \quad \textit{sur } \mathbb{R}^m, \qquad q \equiv 1 \quad \textit{sur } A, \qquad q \equiv 0 \quad \textit{sur } B. \qquad [DESSIN]$$

Preuve. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$, et considerons la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right) & \text{pour } a < x < b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad [DESSIN]$$

On montre facilement que f est dérivable de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Posons $F(x) = \dfrac{\int_x^b f(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}$. Alors F est aussi dérivable de classe C^∞ et on a

$$F(x) = 1 \quad \text{pour } x < a, \qquad F(x) \text{ decroît de 1 à 0 pour } a \leq x \leq b, \qquad F(x) = 0 \quad \text{pour } x > b. \qquad [DESSIN]$$

Considerons ensuite la fonction $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(\vec{x}) = F\left(\|\vec{x}\|^2\right)$. Alors g est une fonction différentiable de classe C^∞ et on a

$$g(\vec{x}) = 1 \quad \text{pour } \|\vec{x}\| < a, \qquad g(\vec{x}) \text{ decroît de 1 à 0 pour } a \leq \|\vec{x}\| \leq b, \qquad g(\vec{x}) = 0 \quad \text{pour } \|\vec{x}\| > b. \qquad [DESSIN]$$

Autrement dit, si D_a et D_b sont deux boules de $\mathbb{R}^m$ centrées en un même point, de rayons $0 < a < b$, il existe une fonction g de classe C^∞, bornée entre 0 et 1, qui vaut 1 à l'intérieur de D_a et est nulle en dehors de D_b.
Soit maintenant $A \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble fermé et borné, donc compact. Alors A peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes D_j, i.e. $A \subset \cup_j D_j$. Si B est un ensemble fermé et disjoint de A, quitte à reduire les boules D_j, on peut supposer que $B \cap \bar{D}_j = \emptyset$ pour tout j, où $\bar{D}_j$ denote la fermeture de D_j. On peut aussi reduire les boules D_j en des boules plus petites D'_j qui continuent à recouvrir A.
Pour chaque indice j considerons alors la fonction $g_j \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ telle que

$$0 \leq g_j \leq 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}^m, \qquad g_j \equiv 1 \quad \text{dedans } D'_j, \qquad g_j \equiv 0 \quad \text{dehors } D_j.$$

Enfin, posons $q(\vec{x}) = 1 - \prod_j \left(1 - g_j(\vec{x})\right)$. Il est clair que q est de classe C^∞, bornée entre 0 et 1, et qu'elle vaut 1 sur A et 0 sur B. □

7.5 Lemme. *Soit M une varieté différentiable, $C \subset M$ un ensemble compact et $V \subset M$ un ensemble ouvert tel que $C \subset V$. Alors il existe une fonction $q \in C^\infty(M)$ telle que*

$$0 \leq q \leq 1 \quad \textit{sur } M, \qquad q \equiv 1 \quad \textit{sur } C, \qquad q \equiv 0 \quad \textit{en dehors de } V. \qquad [DESSIN]$$

Preuve. Soit $\{U_r\}$ un recouvrement d'ouverts de M qui supporte des cartes locales $\varphi_r : U_r \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Puisque C est compact dans M, il peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts U_r de l'atlas donné, disons pour $r = 1, ..., N$, et il existe des sous-ensembles compacts $C_r \subset U_r$ qui le recouvrent. De plus, les ouverts U_r peuvent être reduit de telle sorte que leur union soint contenue dans l'ouvert V, i.e. $C \subset \cup_{r=1}^N C_r \subset \cup_{r=1}^N U_r \subset V$.
Pour tout $r = 1, .., N$, la carte locale φ_r est un difféomorphisme de classe C^∞, donc l'image $\varphi_r(U_r)$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^m$ et l'image $\varphi_r(C_r)$ est un compact de $\mathbb{R}^m$ contenu dans $\varphi_r(U_r)$. Par le Lemme (7.4), il existe donc une fonction $q_r \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ bornée entre 0 et 1, qui vaut 1 dedans $\varphi_r(C_r)$ et 0 en dehors de $\varphi_r(U_r)$.
Pour tout $r = 1, ..., N$, soit alors $\tilde{q}_r : M \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\tilde{q}_r(x) = \begin{cases} q_r(\varphi_r(x)) & \text{si } x \in U_r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chaque fonction $\tilde{q}_r$ est C^∞ sur M, et vaut 1 dedans C_r et 0 en dehors de U_r. Alors la fonction $q = 1 - \prod_{r=1}^N \left(1 - \tilde{q}_r\right)$ est C^∞ sur M, elle vaut 1 dedans C et 0 en dehors de V. □

Preuve de Théorème 7.3. Soit $\{U_r\}$ un recouvrement d'ouverts de M localement fini qui supporte des cartes locales $\varphi_r : U_r \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Alors on peut reduire chaque ouvert U_r en un ouvert plus petit U_r' tel que sa fermeture $\bar{U_r}'$ soit contenue dans U_r et de telle façon que la famille $\{U_r'\}$ reste un recouvrement de M.
Pour chaque r fixé, par le Lemme (7.5), il existe des fonctions $q_r \in C^\infty(M)$ telles que $0 \leq q_r \leq 1$ sur M, $q_r = 1$ dedans $\bar{U_r}'$ et $q_r = 0$ en dehors de U_r.
Alors la fonction $\tilde{p} = \sum_r q_r$ est bien définie sur M parce que chaque point $x \in M$ se trouve en un nombre fini d'ouverts U_r, et donc seulement un nombre fini de fonctions ψ_r a une contribution non nulle sur x. Aussi, $\tilde{p}$ est de classe C^∞ sur M, et $\tilde{p}(x) > 0$ pour tout $x \in M$, car $\{U_r'\}$ est un recouvrement de M. Il est alors facile de demontrer que les fonctions

$$p_r = \frac{q_r}{\tilde{p}}$$

forment une partition de l'unité subordonnée à l'atlas donné. □

7.2 Varietés orientables et forme volume

7.6 Definition. Une varieté différentiable M de dimension m s'appelle **orientable** si elle admet un atlas $\{(U_r, \varphi_r)\}$ tel que tous les changement de cartes $\psi_{rs} = \varphi_s \circ \varphi_r^{-1}$ aient Jacobien positif, i.e.

$$\det\ d\psi_{rs} > 0, \quad \forall r, s, \qquad \text{où} \qquad d\psi_{rs} \in \mathrm{Mat}_{mm}(\mathbb{R}).$$

Si aucun atlas sur M n'a cette proprieté, M est **non-orientable**.

Si M est orientable, un atlas ayant la proprieté ci-dessus s'appelle **orientation** de M. Un autre atlas $\{\varphi_s'\}$ dont les changement de cartes ont Jacobien positif défini sur M la **même orientation**. Si, au contraire, il existe un s tel que $\det\ d(\varphi_s' \circ \varphi_r^{-1}) < 0$ pour tout un r, l'atlas $\{\varphi_s'\}$ défini sur M l'**orientation opposée** à celle de $\{\varphi_r\}$.

7.7 Exemples.
1. Les sphères et les quadriques de $\mathbb{R}^3$ sont des varietés orientables.
2. Le plan projectif réel, la bande de Möbius et la boutelle de Klein sont des varietés non-orientables.
3. Le fibré tangent à une varieté M est une varieté orienté même si M ne l'est pas.

Si M est une varieté différentelle de dimension m, l'espace des m formes différentielles $\Omega^m(M)$ est un module sur $C^\infty(M)$ qui est localement de rang 1. En effet, sur chaque carte (U, φ) une m-forme ω sur M est de la forme

$$\omega\Big|_U = f\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m, \qquad \text{avec} \quad f \in C^\infty(U).$$

La fonction f depend de la carte U choisie : sur une autre carte, ω aura comme coéfficient une autre fonction f'.

7.8 Definition. On appelle **forme volume sur** M une m-forme différentielle sur M qui ne s'annulle jamais, c'est-à dire que ses coéfficients locaux f sont non-nuls sur toutes les cartes locales.

On appelle **forme volume standard** sur $\mathbb{R}^m$ la forme définie en coordonnées cartesiennes $(x^1, ..., x^m)$ par

$$\mathrm{vol} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m =: dx^1 \cdots dx^m.$$

7.9 Proposition. *Une varieté différentiable admet une forme volume si et seulement si elle est orientable.*

Preuve. Pour construire une forme de degré m sur M il suffit de recoller les formes standards $\mathrm{vol}_r = dx^1 \cdots dx^m$ sur chaque ouvert U_r muni de coordonnées locales, en utilisant une partition de l'unité $\{p_r\}$ supportée par ces ouverts :

$$\mathrm{vol} = \sum_r p_r\ \mathrm{vol}_r.$$

Pour que cette m-forme soit une forme volume il suffit qu'elle ne s'annulle jamais. Ceci est équivalent à pouvoir fixer le signe de vol sur tout M, et cette condition est équivalente au fait que M soit orientable. En effet, si M n'est pas orientable, le signe des fonctions sur M change d'une carte locale à une autre quand le Jacobien du changement de coordonnée est negatif. □

7.3 Intégration des formes différentielles

7.10 Definition. Le **support** d'une forme différentielle ω sur M est l'ensemble

$$\operatorname{supp}\omega := \mathcal{F}\Big(\{x \in M,\ \omega(x) \neq 0\}\Big),$$

où $\mathcal{F}$ est la fermeture topologique.

7.11 Definition. Soit ω une forme différentielle du même degré m de la varieté M. Fixons un atlas $\{(U_r, \varphi_r)\}$ sur M, avec coordonnées $(x^1, ..., x^m)$, et fixons une partition de l'unité $\{p_r\}$ subordinée à cet atlas.

Supposons que localement la forme ω soit donnée par

$$\omega\Big|_{U_r} = \omega_r\ \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m, \qquad \omega_r \in C^\infty(U_r) \subset C^\infty(M).$$

Puisque, pour tout r, le support de la forme $p_r\ \omega$ est contenu dans $\operatorname{supp} p_r \subset U_r$, on a $p_r\ \omega = p_r\ \omega\Big|_{U_r}$.

On défini alors l'**intégrale de ω sur M** comme la somme

$$\int_M \omega := \sum_r \int_M\ p_r\ \omega = \sum_r \int_{U_r}\ p_r\ \omega\Big|_{U_r}, \tag{13}$$

où, sur chaque carte U_r, on défini

$$\int_{U_r}\ p_r\ \omega\Big|_{U_r} := \int_{\varphi(U_r)}\ p_r(x^1, ..., x^m)\ \omega_r(x^1, ..., x^m)\ \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^m. \tag{14}$$

La somme sur r dans l'intégrale (13) peut être une somme infinie, et donc divergente. Cela arrive s'il faut un nombre infini d'ouverts U_r pour couvrir le support de la forme ω. Une condition qui empeche cette somme d'être divergente est que le support de ω soit compact.

7.12 Proposition. *Si M est une varieté orientable de dimension m et ω est une m-forme à support compact, l'intégrale de ω sur M est bien défini, i.e. il est independante des cartes choisies.*

Preuve.

1. Pour un atlas fixé, montrons que la définition d'intégrale est independente de la carte locale choisie, i.e. que si $\operatorname{supp}\omega \subset U_r \cap U_s$, alors

$$\int_{U_r} \omega\Big|_{U_r} = \int_{U_s} \omega\Big|_{U_s}.$$

Soient $(x^1, ..., x^m)$ les coordonnées locales dans la carte (U_r, φ_r) et $(y^1, ..., y^m)$ celles dans la carte (U_s, φ_s), et considerons le changement de carte $\psi_{rs} = \varphi_s \circ \varphi - r^{-1} : \varphi_r(U_r \cap U_s) \longrightarrow \varphi_s(U_r \cap U_s)$ telle que

$$(y^1, ..., y^m) = \psi_{rs}(x^1, ..., x^m), \qquad \text{et}$$
$$\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^m = \det(\mathrm{d}\psi_{rs})\ \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m.$$

Puisque M est orientée (et donc le signe de $\det(\mathrm{d}\psi_{rs})$ est déterminé), par changement de variables on a :

$$\begin{aligned}\omega\Big|_{U_s} &= \psi_{rs}^*(\omega\Big|_{U_r}) = \psi_{rs}^*\Big(\omega_r(x^1, ..., x^m)\ \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m\Big) \\ &= \big(\omega_r \circ \psi_{rs}^{-1}\big)(y^1, ..., y^m)\ \det(\mathrm{d}\psi_{rs}^{-1})\ \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^m,\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_{U_s} \omega\Big|_{U_s} &= \int_{\varphi_s(U_s)} \omega_s(y^1, ..., y^m)\ \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^m \\ &= \int_{\psi_{rs}(\phi(U_r))} \omega_r\big(\psi_{rs}^{-1}(y^1, ..., y^m)\big)\ \det(\mathrm{d}\psi_{rs}^{-1})\ \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^m \\ &= \int_{\varphi_r(U_r)} \omega_r(x^1, ..., x^m)\ \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m = \int_{U_r} \omega\Big|_{U_r}.\end{aligned}$$

2. Montrons ensuite que la définition d'intégrale est independante de l'atlas choisi. Soient $\{(U_r, \varphi_r)\}$ et $\{(V_s, \eta_s)\}$ deux atlas de M, et soient $\{p_s\}$ et $\{q_s\}$ deux partitions de l'unité subordinées à ces deux atlas. Alors le recouvrement $\{W_{rs} := U_r \cap V_s\}$ détermine un nouvel atlas de M, et l'ensemble des fonctions produit $\{p_s q_r\}$ est une partition de l'unité subordinée à cet atlas. On a alors

$$\sum_r \int_M p_r\omega = \sum_r \int_M p_r\Big(\sum_s q_s\Big)\ \omega = \sum_{r,s} \int_M p_r q_s\ \omega = \sum_s \int_M q_s\Big(\sum_r p_r\Big)\ \omega = \sum_s \int_M q_s\ \omega,$$

où les intégrales sur M se reduisent à des intégrales sur W_{rs}.

$\square$

7.4 Varietés à bord

7.13 Definition. Un **demi-espace de** $\mathbb{R}^m$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$ de la forme

$$H^m := \{(x^1, ..., x^m) \in \mathbb{R}^m,\ x_1 \geq 0\},$$

avec bord

$$\partial H^m = \{(0, x^2, ..., x^m) \in \mathbb{R}^m\}.$$

Un ouvert de H^m est l'intersection de H^m avec un ouvert U de $\mathbb{R}^m$. Si U traverse l'hyperplan ∂H^m, l'ouvert correspondant de H^m contient ses points de bord $U \cap \partial H^m$.

7.14 Definition. Si V est un ouvert de H^m, une fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est **différentiable sur** V s'il existe un ouvert $\bar{V}$ de $\mathbb{R}^m$ contenant V et une fonction différentiable $\bar{f} : \bar{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ dont la restriction à V coincide avec f.

Dans ce cas, la **différentielle de** f en un point $\vec{x} = (x^1, ..., x^m)$ de V est par définition la différentielle de son extension $\bar{f}$ en ce point, $\mathrm{d}f_{\vec{x}} = \mathrm{d}\bar{f}_{\vec{x}}$. À noter que si $x^1 = 0$, c'est-à-dire $\vec{x} \in \partial H^m$, $\mathrm{d}f_{\vec{x}}$ est défini sur tous les vecteurs tangents passant par $\vec{x}$, et cela permet de montrer que la définition de $\mathrm{d}f_{\vec{x}}$ est independante de l'extension $\bar{f}$ choisie.

7.15 Definition. Une **varieté différentiable de dimension** m **avec bord (régulier)** se défini comme une varieté différentiable de dimension m, sauf que les cartes sont des homéomorphismes $\varphi_r :\longrightarrow H^m$ à valeur dans H^m au lieu que $\mathbb{R}^m$, et les changement de cartes sont des difféomorphismes $\psi_{rs} : H^m \longrightarrow H^m$.

Un point $x \in M$ s'appelle **point de bord** s'il existe une carte (U, φ) telle que $\varphi(P) = (0, x^2, ..., x^m) \in \partial H^m$.

7.16 Lemme. *La définition des points de bord ne depend pas de la carte choisie.*

Preuve. [Do Carmo "Diff Forms" p.61] FINIR □

On note ∂M l'ensemble des points de bord de M. Si $\partial M = \emptyset$, on retrouve la définition usuelle des varietés différentielles.

7.17 Proposition. *Si M est une varieté différentiable de dimension m, son bord ∂M est une varieté différentiable de dimension $m-1$. De plus, si M est orientable, ∂M l'est aussi, et une orientation de M induit une orientation de ∂M.*

Preuve. [Do Carmo "Diff Forms" p.62] FINIR □

7.18 Exemples.

7.5 Théorème de Stokes

7.19 Théorème. [Théorème de Stokes] *Soit M une varieté de dimension m, orientable et avec bord. Soit ω une $m-1$-forme différentielle sur M, et soit $i : \partial M \hookrightarrow M$ l'inclusion du bord de M dans M. Alors*

$$\int_{\partial M} i^*\omega = \int_M \mathrm{d}\omega.$$

Preuve. [Do Carmo "Diff Forms" p.63] FINIR □

8 Varietés (pseudo-) riemanniennes et connexion de Levi-Civita

8.1 Champs de tenseurs

8.1 Definition. Soit M une varieté différentiable de dimension m. Pour tout $x \in M$ soit $T_x^{(p,q)}M := T_xM^{\otimes p} \otimes T_x^*M^{\otimes q}$ l'espace des tenseurs de type (p,q) sur l'espace tangent à M en x.

Comme on l'a montré pour les fibré tangent, l'union disjointe $T^{(p,q)}M := \bigcup_{x\in M} T_x^{(p,q)}M$ est une varieté différentiable, de dimension $m^2(p+q)$. Les cartes se trouvent à partir des cartes de M. On l'appelle **fibré des tenseurs de type** (p,q) sur M.

On appelle **champ de tenseurs de type** (p,q) **sur** M toute section du fibré $T^{(p,q)}M$: c'est donc une application différentiable $T : M \longrightarrow T^{(p,q)}M,\ x \mapsto T_x \in T_x^{(p,q)}M$, qui s'exprime, dans toute carte (U,φ) avec coordonnées locales $(x^1,...,x^m)$, comme

$$T = \sum_{i,j} T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_q},$$

avec coéfficients $T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \in C^\infty(U)$.

On indique par $\mathcal{T}^{(p,q)}(M)$ l'ensemble des champs de tenseurs de type (p,q) sur M. En particulier, on a donc $\mathfrak{X}(M) = \mathcal{T}^{(1,0)}(M)$ et $\Omega^1(M) = \mathcal{T}^{(0,1)}(M)$.

8.2 Exemple. Un champ de tenseur covariants d'ordre 2 est une section η du fibré $T^*M \otimes T^*M$, i.e. $\eta \in \Omega^1(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Omega^1(M)$. Il peut être vu comme une application bilinéaire $\eta : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$.

8.2 (*) Espace vectoriel métrique

8.3 Definition. Une **métrique** sur un espace vectoriel réel V est un produit scalaire non dégénerée, c'est-à-dire une application $\eta : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1. η est bilinéaire : $\eta(\alpha v + \beta w, u) = \alpha\eta(v,u) + \beta\eta(w,u)$ et $\eta(u, \alpha v + \beta w) = \alpha\eta(u,v) + \beta\eta(u,w)$, pour tout $u,v,w \in V$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$;
2. η est symmétrique : $\eta(u,v) = \eta(v,u)$, pour tout $u,v \in V$;
3. η est non dégenerée : si $\eta(u,v) = 0$ pour tout $v \in V$ alors $u = 0$.

Un **espace métrique** est un espace vectoriel muni d'une métrique.

Dans une base fixée $\{e_i\}$ de V, une métrique s'exprime donc comme une matrice symmétrique $\Big(\eta_{ij} = \eta(e_i,e_j)\Big)$ de déterminant non nul. On appelle **signature de la métrique** η la signature $(k, m-k)$ de la matrice $\Big(\eta_{ij}\Big)$, où k est le nombre de valeurs propres positifs et $m-k$ celui de valeurs propres negatifs. Il est évident que la signature est independante de la base choisie.

Une métrique sur V peut être vue comme une application linéaire $\eta : V^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire comme un tenseur covariant d'order 2, $\eta \in T^{(0,2)}$, qui en plus est symmétrique et non dégeneré, et caracterisée par une signature $(k, m-k)$.

8.4 Definition. Si V est un espace métrique, une base $\{e_i\}$ est **orthonormale** si $\eta(e_i,e_j) = \pm\delta_{ij}$. Le nombre de $+$ et de $-$ est évidemment la signature de η. On peut montrer que sur tout espace métrique de dimension finie il existe une base orthonormale.

8.3 Varietés avec métrique

8.5 Definition. Une **métrique** sur une varieté différentiable M est un champ η de tenseurs de type $(0,2)$ sur M tels que, pour tout $x \in M$, le tenseur $\eta_x \in T_x^*M \otimes T_x^*M$ soit une métrique sur T_xM. Autrement dit, une métrique est une application $\eta : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ telle que

1. η est $C^\infty(M)$-bilinéaire ;
2. $\eta(X,Y) = \eta(Y,X)$, pour tout $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$;
3. si $\eta(X,Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{X}(M)$ alors $X = 0$.

L'expression d'une métrique η dans une carte (U,φ) de M avec coordonnées locales $(x^1,...,x^m)$ est donc

$$\eta\Big|_U = \sum_{i,j=1}^m \eta_{ij}^U \,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j,$$

où $\big(\eta_{ij}^U\big)$ est une matrice symmétrique (i.e. $\eta_{ij}^U = \eta_{ji}^U$) et de détérminant non-nul, à coéfficients dans $C^\infty(U)$ donnés par les fonctions

$$\eta_{ij}^U : U \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \eta_{ij}^U(x) := \eta_x\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x\Big).$$

Une métrique η s'appelle **riemannienne** si elle est définie positive (ou negative, c'est pareil), i.e. si la signature est $(m, 0)$, où $m = \dim M$. Sinon, elle s'appelle **pseudo-riemannienne**.

Une varieté M munie d'une métrique η s'appelle donc **varieté riemannienne** ou **varieté pseudo-riemannienne** selon le signature de η.

8.6 Proposition. *Toute varieté différentiable de Hausdorff et paracompacte admet une métrique riemannienne.*

Preuve. Si $\{U_r\}$ est un atlas localement fini, supportant des cartes locales de coordonnées $(x^1, ..., x^m)$ et une partition de l'unité $\{p_r\}$, on défini une métrique riemannienne η_r sur chaque ouvert U_r en posant

$$\eta_r\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, ..., m$$

et on colle les métriques locales avec la partition de l'unité

$$\eta = \sum_r \, p_r \; \eta_r.$$

La valeur de η en chaque point x de M est strictement positive car $\sum_r \, p_r(x) = 1$ et η_r est riemannienne. Donc η est bien une métrique riemannienne sur M. □

Attention : toute varieté n'admet pas une métrique pseudo-riemannienne. En effet, une métrique pseudo-riemannienne s'annulle forcement quelque part, et le recollement de métriques pseudo-riemanniennes avec une partition de l'unité ne produit pas forcement un tenseur de signature constante.

8.7 Exemples. – L'**espace Euclidien** $\mathbb{E} = \mathbb{R}^m$ avec coordonnées globales $(x^1, ..., x^m)$ et métrique $\eta(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, où on identifie $\frac{\partial}{\partial x^i}$ avec la base standard $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$. L'espace Euclidien est le prototype de varieté riemannienne.

– L'**espace de Minkowski** $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ avec coordonnées globales $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x})$ et métrique

$$\begin{aligned} &\eta(e_0, e_0) = -1, \\ &\eta(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3 \\ &\eta(e_0, e_i) = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

où $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. On indique aussi $\eta = \operatorname{diag}(-1, 1, 1, 1)$. L'espace de Minkowski est le prototype de varieté pseudo-riemanienne de signature $(3, 1)$.

L'espace de Minkowski est l'espace-temps de la relativité restreinte. Mais attention, la signature $(3, 1)$ est une convention : dans d'autres contextes (par exemple en théorie quantique des champs), on défini la métrique de Minkowski comme $\eta = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$, de signature $(1, 3)$.

8.4 Isométries

8.8 Definition. Soient M et N deux varietés avec métriques η^M et η^N. Un difféomorphisme $\phi : M \longrightarrow N$ est une **isométrie** s'il preserve les métriques, i.e. si pour tout $x \in M$ on a

$$\eta^M_x(X_x, Y_x) = \eta^N_{\phi(x)}(\mathrm{d}\phi_x(X_x), \mathrm{d}\phi_x(Y_x)), \qquad X_x, Y_x \in T_x M.$$

Dans ce cas, on dit que M et N sont deux varietés **isométriques**.

Un difféomorphisme $\phi : M \longrightarrow N$ est une **isométrie locale en** $x \in M$ s'il existe un voisinage U de x dans M tel que la restriction $\phi\Big|_U : U \longrightarrow \phi(U)$ soit une isométrie. Deux varietés M et N sont **localement isométriques** si pour tout $x \in M$ il existe un voisinage U de x dans M et une isométrie locale $\phi^U : U \longrightarrow \phi(U) \subset N$.

8.5 Longueur des courbes, volume des domaines

8.9 Definition. Soit M une varieté différentiable avec métrique η et soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe regulière sur M passante par deux points x et b de M. Si $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ est l'intervalle dans le domaine de γ tel que $\gamma(t_1) = x$ et $\gamma(t_2) = y$, on appelle **longueur de** γ **entre** x **et** y l'intégrale

$$\ell^y_x(\gamma) := \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{|\eta_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))|}\; \mathrm{d}t.$$

La longuer d'une courbe peut donc être définie sur une varieté pseudo-riemannienne aussi bien que sur une varieté riemannienne, mais dans ce cas on peut avoir des courbes de longueur nulle : ce sont les courbes tangentes en tout point au *cône lumière* $\{\vec{v} \in TM \mid \eta(\vec{v}, \vec{v}) = 0\}$.

8.10 Definition. Soit M une varieté différentiable orientable et avec métrique η. On appelle **forme volume standard** sur M la m-forme vol donnée sur chaque carte (U,φ_U) avec coordonnées locales $(x^1,...,x^m)$ par

$$\mathrm{vol}\Big|_U = \sqrt{|\det(\eta_{ij})|}\ \mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m.$$

Si D est un sous-ensemble de M connexe et compact (ou ouvert avec fermeture compacte), on appelle **volume de** D (ou **aire de** D si $\dim M = 2$) l'intégrale

$$\mathrm{vol}\,(D) := \int_D \mathrm{vol}\,.$$

En particulier, si la fermeture de D est contenue dans une carte (U,φ), on a

$$\mathrm{vol}\,(D) = \int_{\varphi(D)} \sqrt{|\det(\eta_{ij})|}\ \mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^m.$$

8.11 Lemme. *La m-forme* vol *donnée ci-dessus est une forme volume sur M.*

Preuve. Puisque une métrique est non dégénerée, son déterminant ne s'annulle jamais. Alors, si l'expression de vol en coordonnées locales est independante du choix de la carte, elle défini évidemment une forme volume sur M. Montrons donc que si (V,φ_V) est une autre carte sur M telle que $U\cap V\neq\emptyset$ et donnant la même orientation, i.e. le Jacobien de la fonction de transition $\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}$ est positif, alors $\mathrm{vol}\Big|_U = \mathrm{vol}\Big|_V$.

D'abord, observons que pour tout $x\in M$, la base $\big\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x,\ i=1,...,m\big\}$ de T_xM n'est pas nécessairement orthonormale (elle l'est si et seulement si $\eta^U_{ij} = \pm\delta_{ij}$ pour tout i et j). Soit $\big\{e_i,\ i=1,...,m\big\}$ une base orthonormale de T_xM (i.e. $\eta_x(e_i,e_j) = \pm\delta_{ij}$), et soit $A=(a_i^j)$ la matrice du changement de base, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x = \sum_{j=1}^m a_i^j\ e_j.$$

On voit alors que

$$\eta^U_{ij} = \eta\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x\Big) = \sum_{h,k=1}^m a_i^h a_j^k\ \eta(e_h,e_k) = \pm\sum_{k=1}^m a_i^k a_j^k,$$

et donc que $|\det\big(\eta^U_{ij}\big)| = (\det A)^2$.

De l'autre coté, les formes linéaires e_i^* duales forment une base de T_x^*M alternative à l'ensemble $\big\{\mathrm{d}x^{,}\ j=1,...,m\big\}$, et les covecteurs e_i^* s'expriment en fonction des covecteurs $\mathrm{d}x^j$ avec la matrice A. Sur U, on a donc

$$\mathrm{vol}^U = e_1^*\wedge\cdots\wedge e_m^* = \det A\ \mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m = \sqrt{|\det(\eta^U_{ij})|}\ \mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m.$$

Maintenant, considerons une autre carte locale (V,φ_V) telle que $U\cap V\neq\emptyset$ et donnant la même orientation, et appellons $(y^1,...,y^m)$ les coordonnées dans V. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}^V\Big|_{U\cup V} &= \sqrt{|\det(\eta^V_{ij})|}\ \mathrm{d}y^1\wedge\cdots\mathrm{d}y^m \\ &= \sqrt{|\det(\eta^V_{ij})|}\ \det\Big(\frac{\partial y^h}{\partial x^k}\Big)\ \mathrm{d}x^1\wedge\cdots\mathrm{d}x^m \\ &= \sqrt{|\det(\eta^U_{ij})|}\ \mathrm{d}x^1\wedge\cdots\mathrm{d}x^m = \mathrm{vol}^U\Big|_{U\cup V},\end{aligned}$$

car si $(y^1,...,y^m) = \psi(x^1,...,\psi^m)$, alors

$$|\det(\eta^V_{ij})|\ \big(\det\ \mathrm{d}\psi\big)^2 = \big|\det\Big((\mathrm{d}\psi)^t\ \eta^V_{ij}\ \mathrm{d}\psi\Big)\big| = |\det(\eta^U_{ij})|.$$

□

8.6 Opérateur de Hodge et co-différentielle

Soit M une varieté orientable, avec forme volume vol, et avec métrique η.

8.12 Definition. La métrique η induit une opération de **contraction** entre formes différentielles de même degré : c'est l'application $C^\infty(M)$-bilinéaire

$$\Omega^q(M)\times\Omega^q(M)\longrightarrow C^\infty(M),\qquad (\alpha,\beta)\longmapsto\eta(\alpha,\beta) := \frac{1}{q!}\sum\eta^{i_1j_1}\cdots\eta^{i_qj_q}\ \alpha_{i_1\cdots i_q}\ \beta_{j_1\cdots j_q},$$

où η^{ij} sont les coéfficients de la matrice inverse de $\eta=(\eta_{ij})$.

Pour tout $\beta\in\Omega^q(M)$ fixée, on a donc une application $C^\infty(M)$-linéaire $\eta(-,\beta):\Omega^q(M)\longrightarrow C^\infty(M)$. Denotons par $\Big(\Omega^q(M)\Big)^*$ le dual $C^\infty(M)$-linéaire de $\Omega^q(M)$.

8.13 Lemme. *L'application* $\Omega^q(M) \longrightarrow \Big(\Omega^q(M)\Big)^*$ *définie par* $\beta \longmapsto \eta(-,\beta)$ *est un isomorphisme de* $C^\infty(M)$*-modules.*

Preuve. D'un coté, puisque

$$\dim_{C^\infty(M)} \Big(\Omega^q(M)\Big)^* = \dim_{C^\infty(M)} \Omega^q(M) = \frac{m!}{q!(m-q)!},$$

l'application est surjective. De l'autre coté, puisque η est non degénerée, on a que $g(\alpha,\beta) = 0$ pour tout β si et seulement si $\alpha = 0$, donc l'application est aussi injective. □

8.14 Proposition. *Il existe un unique isomorphisme de* $C^\infty(M)$*-modules* $\star : \Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^{m-q}(M)$ *tel que*

$$\alpha \wedge \star\beta = \eta(\alpha,\beta)\,\mathrm{vol}\,,$$

pour tout $\alpha,\beta \in \Omega^q(M)$*. L'opérateur* $\star$ *s'appelle* **dual de Hodge** *parce qu'il a la proprieté de dualité suivante :*

$$\star\star\,\omega = (-1)^{q(m-q)}\ s\ \omega, \qquad \omega \in \Omega^q(M),$$

où s *indique le signe de* $\det\eta$*.*

Preuve. Pour tout $\gamma \in \Omega^{m-q}(M)$, soit $\Phi_\gamma \in \Big(\Omega^q(M)\Big)^*$ l'application $C^\infty(M)$-linéaire $\Phi_\gamma : \Omega^q(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ définie par

$$\Phi_\gamma(\alpha)\,\mathrm{vol} = \alpha\wedge\gamma, \qquad \alpha \in \Omega^q(M).$$

L'application $\Phi : \Omega^{m-q}(M) \longrightarrow \Big(\Omega^q(M)\Big)^*$, $\gamma \longmapsto \Phi_\gamma$ est un isomorphisme de $C^\infty(M)$-modules. En effet, elle est injective parce que si $\Phi_\gamma(\alpha) = 0$ pour tout α on a $\gamma = 0$, et elle est surjective parce que

$$\dim_{C^\infty(M)} \Big(\Omega^q(M)\Big)^* = \frac{m!}{q!(m-q)!} = \dim_{C^\infty(M)} \Omega^{m-q}(M).$$

Par conséquent, et en utilisant le Lemme précédent, pour toute forme $\beta \in \Omega^q(M)$ il existe une forme $\gamma \in \Omega^{m-q}(M)$ telle que $\Phi_\gamma = \eta(-,\beta)$, c'est-à-dire $\Phi_\gamma(\alpha) = \eta(\alpha,\beta)$ pour tout $\alpha \in \Omega^{m-q}(M)$. Appellons $\star\beta$ cette forme γ. On a donc un isomorphisme de $C^\infty(M)$-modules $\beta \longmapsto \star\beta$ tel que

$$\eta(\alpha,\beta)\,\mathrm{vol} = \Phi_{\star\beta}(\alpha)\,\mathrm{vol} = \alpha\wedge\beta.$$

L'unicité de l'isomorphisme $\star$ est garantie par l'expression explicite de $\star\omega$ en fonction des coéfficients de ω, donnée en (15). La proprieté de dualité en suit aussi. □

8.15 Definition. Le **symbol de Levi-Civita** est

$$\varepsilon_{ijkl\ldots} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k,l,\ldots) \text{ est une permutation paire de } (1,2,3,4,\ldots) \\ -1 & \text{si } (i,j,k,l,\ldots) \text{ est une permutation impaire de } (1,2,3,4,\ldots) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, si $m = 3$, on a

$$\varepsilon_{ijkl\ldots} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (1,2,3),\ (3,1,2) \text{ ou } (2,3,1) \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (1,3,2),\ (3,2,1) \text{ ou } (2,1,3) \\ 0 & \text{sinon : } i=j \text{ ou } j=k \text{ ou } k=i. \end{cases}$$

Le symbol de Levi-Civita permet de calculer les déterminants : par exemple, si $\big(a_{ij}\big)$ est une matrice 3×3, on a

$$\det\big(a_{ij}\big) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\ a_{1i}\ a_{2j}\ a_{3k}.$$

8.16 Proposition. *Pour la* q*-forme* $\omega = \displaystyle\sum_{1\le i_1<\cdots<i_q\le m} \omega_{i_1\cdots i_q}\ \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_q}$*, le dual de Hodge est la forme*

$$\star\omega = \frac{1}{q!}\sqrt{|\det\eta|} \sum_{1\le j_{q+1}<\cdots<j_m\le m} \omega^{j_1\cdots j_q}\ \varepsilon_{j_1\cdots j_q j_{q+1}\cdots j_m}\mathrm{d}x^{j_{q+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_m}, \tag{15}$$

où $\omega^{j_1\cdots j_q} = \sum \eta^{i_1j_1}\cdots\eta^{i_qj_q}\ \omega_{i_1\cdots i_q}$*.*

Preuve. Si on appelle $\widetilde{\omega}$ l'expression à droite dans la formule (15), il suffit de verifier que $\alpha \wedge \widetilde{\omega} = \eta(\alpha, \omega)\,\mathrm{vol}$ pour tout $\alpha \in \Omega^q(M)$. Cela se fait avec un calcul explicite. □

8.17 Definition. On appelle **co-differentielle** l'opérateur $\delta : \Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^{q-1}(M)$ défini par

$$\delta = (-1)^{mq+m+1}\ s\ \star \mathrm{d} \star = (-1)^q \star^{-1} \mathrm{d}\star,$$

où d est la différentielle extérieure.

À noter que la co-différentielle n'est pas une dérivation de l'algèbre des formes différentielles, mais elle satisfait la proprieté $\delta^2 = 0$, herité de l'analogue proprieté pour d.

Enfin, la co-differentielle est l'opérateur adjoint de la dérivée extérieur, dans le sens que

$$\eta(\alpha, \delta\beta) = \eta(\mathrm{d}\alpha, \beta), \qquad \alpha \in \Omega^{q+1}(M), \quad \beta \in \Omega^q(M).$$

Ceci est une conséquence du Théorème de Stokes.

8.7 Connexion de Levi-Civita

8.18 Definition. Une **connexion sur la varieté** M est une connexion sur le fibré tangent TM, c'est-à-dire une application

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

qui est $C^\infty(M)$-linéaire dans la variable X et une $C^\infty(M)$-dérivation dans la variable Y, et qui peut être vue comme une dérivée covariante

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M; TM) = \Omega^1(M) \otimes_{C^\infty(M)} \mathfrak{X}(M).$$

Les symbols de Christoffel d'une telle connexion sont des fonctions locales Γ_{ij}^k telles que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, pour tout $i, j = 1, ..., m$.

8.19 Definition. On appelle **torsion** de la connexion ∇ l'application

$$T : \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \longmapsto T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

qui est évidemment antisymmétrique en X et Y et $C^\infty(M)$-linéaire dans les deux variables (preuve en exo). La torsion peut donc être vue comme une application $C^\infty(M)$-linéaire $T : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M; TM)$ à valeurs dans les 1-forme, ou bien aussi comme une 2-forme $T \in \Omega^2(M; TM)$.

En coordonnées locales, la torsion s'exprime par des **coéfficients de torsion**, c'est-à-dire des fonctions locales T_{ij}^k telles que

$$T(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_k T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \qquad \text{i.e.} \qquad T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

Une connexion ∇ s'appelle **symmétrique** ou **à torsion nulle** si $T \equiv 0$, i.e. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ pour tout $i, j, k = 1, ..., m$.

La signification géométrique de la torsion est la suivante : fixons deux champs de vecteurs X et Y sur M et partons d'un point x_0 en suivant la courbe intégrale de X pendant un temps $t/2$ et ensuite celle de Y jusqu'au temps t, et nous arrivons en un point x_1. Ou bien, suivont d'abord la courbe intégrale de Y et ensuite celle de X, pour arriver à un point x_2. [DESSIN]

En général $x_1 \neq x_2$, et la distance de ces deux points est de l'ordre de $\|x_1 - x_2\| = T(X, Y)t^2 + \mathcal{O}(t^3)$.

8.20 Proposition. *Si ∇ est une connexion symmeétrique, autour de tout point x_0 de M il existe des coordonnées locales telles que les symboles de Christoffel de ∇ soient nuls en x_0.*

Preuve. Postnikov p. 19. □

8.21 Definition. Soit M une varieté avec une métrique η riemannienne ou pseudo-riemannienne. Une connexion ∇ sur M s'appelle **riemannienne** si

1. le transport parallèle déterminé par ∇ est une isométrie sur les espaces tangents, ce qui revient à imposer que

$$X(\eta(Y, Z)) = \eta(\nabla_X Y, Z) + \eta(Y, \nabla_X Z), \qquad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M);$$

2. ∇ a torsion nulle, i.e. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

8.22 Théorème. *Sur toute varieté (pseudo-)riemannienne orientable il existe une unique connexion riemannienne, que l'on appelle* **connexion de Levi-Civita**. *Ses symboles de Christoffel sont défini par l'équation*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum_h \eta^{ih}\Big(\frac{\partial\eta_{hj}}{\partial x^k} + \frac{\partial\eta_{hk}}{\partial x^j} - \frac{\partial\eta_{jk}}{\partial x^h}\Big).$$

Preuve. **Unicité.** Si une telle connexion existe, on a

$$\begin{aligned} X\eta(Y,Z) + Y\eta(Z,X) - Z\eta(X,Y) &= \eta(\nabla_X Y, Z) + \eta(Y, \nabla_X Z) + \eta(\nabla_Y Z, X) + \eta(Z, \nabla_Y X) - \eta(\nabla_Z X, Y) - \eta(X, \nabla_Z Y) \\ &= \eta(Y,[X,Z]) + \eta(X,[Y,Z]) + \eta(Z,[X,Y]) + 2\eta(Z, \nabla_Y X) \end{aligned}$$

parce que

$$\nabla_X Z - \nabla_Z X = [X,Z], \qquad \nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y,Z], \qquad \nabla_X Y + \nabla_Y X = [X,Y] + 2\nabla_Y X.$$

On a donc

$$\eta(Z,\nabla_X Y) = \frac{1}{2}\left[X\eta(Y,Z) + Y\eta(Z,X) - Z\eta(X,Y) - \eta(X,[Y,Z]) - \eta(Y,[X,Z]) - \eta(Z,[X,Y])\right], \qquad (16)$$

ce qui prouve que $\nabla_X Y$ est défini de façon unique.

Existence. L'identité (16) implique qu'il y a une relation entre les symboles de Christoffel de ∇ et les coéfficients de matrice de η :

$$\sum_l \Gamma^l_{ij}\ \eta_{lk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial\eta_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial\eta_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

De cette expression suit la définition des Γ^k_{ij} en termes des η_{ij} :

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_l \left(\frac{\partial\eta_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial\eta_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial\eta_{ij}}{\partial x^l}\right)\eta^{lk}.$$

□

8.23 Exemple. Sur $\mathbb{R}^m$ avec la métrique euclidienne, et sur l'espace de Minkowski, la connexion de Levi-Civita coincide avec la connexion plate. [Do Carmo "Diff Forms" p.59]

8.8 Géodésiques

Soit M une varieté avec une connexion ∇. Le relèvement horizontal d'une courbe γ sur M parametrée par t est une famille à un paramètre de champs de vecteurs $Y(t)$ telle que

$$\nabla_{\gamma'(t)} Y(t) = 0, \qquad \text{pour tout } t.$$

Localement, si on pose $\gamma(t) = (x^1(t), ..., x^m(t))$ et $Y(t) = \sum_{k=1}^m\ Y^k(t)\ \frac{\partial}{\partial x^k}$, cela signifie que

$$\dot{Y}^k(t) + \sum_{i,j=1}^m \Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\ \dot{x}^i(t)\ Y^j(t) = 0, \qquad k = 1, ..., m.$$

Si on fixe un vecteur Y_0 tangent à M au point $\gamma(0)$, le vecteur $Y(t)$ tel que

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'(t)} Y(t) &= 0, \qquad \text{pour tout } t, \\ Y(0) &= Y_0, \end{aligned}$$

est le transport parallèle de Y_0 le long de la courbe γ. [DESSIN]

8.24 Definition. Une courbe γ sur M s'appelle **géodésique** si son vecteur tangent $\gamma'(t)$ est parallèle le long de γ :

$$\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0 \qquad \text{i.e.} \qquad \ddot{x}^k(t) + \sum_{i,j=1}^m \Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\ \dot{x}^i(t)\ \dot{x}^j(t) = 0, \qquad k = 1, ..., m.$$

8.25 Proposition. *Si M est une varieté (pseudo-)riemannienne avec métrique η, les géodésiques par rapport à la connexion de Levi-Civita sont les extrema de l'action d'energie*

$$S[\gamma] = \frac{1}{2}\int \eta(\gamma'(t), \gamma'(t))\ \mathrm{d}t.$$

Preuve. Postnikov Ch. 11 p.140 □

8.9 Courbure riemannienne

La courbure d'une connexion ∇ sur M est une application $C^\infty(M)$-linéaire

$$R : \mathfrak{X}(M) \otimes_C \mathfrak{X}(M) \otimes_C \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X,Y,Z) \longmapsto R(X,Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

où le produit tensoriel est sur $C = C^\infty(M)$, et est donc un tenseur. Étant anti-symmétrique en (X,Y), la courbure est une 2-forme $R \in \Omega^2(M; \operatorname{End} TM)$. Les identités de Bianchi en décrivent les symmétries :

$$\begin{aligned} &R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0, \\ &\big(\nabla_X R\big)(Y,Z) + \big(\nabla_Y R\big)(Z,X) + \big(\nabla_Z R\big)(X,Y) = 0. \end{aligned}$$

8.26 Definition. Si M est une varieté (pseudo-)riemannienne avec métrique η et ∇ est la connexion de Levi-Civita, on appelle **tenseur de courbure riemannienne** l'application $C^\infty(M)$-linéaire

$$\tilde{R} : \mathfrak{X}(M) \otimes_C \mathfrak{X}(M) \otimes_C \mathfrak{X}(M) \otimes_C \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M), \qquad \tilde{R}(X,Y,Z,W) := \eta(R(X,Y)Z, W) = \eta(W, R(X,Y)Z).$$

Localement, on a

$$\tilde{R}(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^h}) = \sum_l R^l_{ij,k}\ \eta_{lh} = \sum_l \eta_{hl}\ R^l_{ij,k} =: R_{ij,kh}.$$

Inversement, on a $\quad R^h_{ij,k} = \sum_l \eta^{hl}\ R_{ij,kl}$.

8.27 Proposition. *Le tenseur $\tilde{R}(X,Y,Z,W)$ a les proprietés de symmétrie suivantes :*

1. *Identité de Bianchi :* $\tilde{R}(X,Y,Z,W) + \tilde{R}(X,Z,W,Y) + \tilde{R}(X,W,Y,Z) = 0$.
2. *Anti-symmétrie en (X,Y) :* $\tilde{R}(X,Y,Z,W) = -\tilde{R}(Y,X,Z,W)$.
3. *Anti-symmétrie en (Z,W) :* $\tilde{R}(X,Y,Z,W) = -\tilde{R}(X,Y,W,Z)$.
4. *Symmétrie dans les couples (X,Y) et (Z,W) :* $\tilde{R}(X,Y,Z,W) = \tilde{R}(Z,W,X,Y)$.

Preuve. Postnikov, Ch. 15 p. 193–197. □

8.10 Courbure de Ricci et courbure scalaire

Soit ∇ une connexion sur une varieté M, et R son tenseur de courbure.

8.28 Definition. On appelle **courbure de Ricci de** M l'application de trace

$$\operatorname{Ric} : \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M), \quad (X,Y) \longmapsto \operatorname{Ric}(X,Y) := \operatorname{tr}\big[Z \mapsto R(Z,Y)X\big].$$

Localement, Ric s'exprime comme

$$\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \operatorname{tr}\Big[\frac{\partial}{\partial x^k} \mapsto R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big] = \sum_k R^k_{kj,i} =: R_{ij}.$$

En général le tenseur de Ricci n'est pas symmétrique. Si la connexion est symmétrique, il est lié à un autre opérateur de trace de R, comme suit. Appellons **trace de** R l'application de trace

$$\operatorname{Tr} R : \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M), \quad (X,Y) \longmapsto \operatorname{Tr} R(X,Y) := \operatorname{tr}\big[Z \mapsto R(X,Y)Z\big].$$

C'est évidemment une application antisymmétrique en X et Y, donc $\operatorname{Tr} R \in \Omega^2(M)$. Localement, $\operatorname{Tr} R$ s'exprime comme

$$\operatorname{Tr} R = \sum_{i<j} \sum_k R^k_{ij,k}\ \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j.$$

On peut montrer [Postnikov, Ch. 2, Ex. 2.7, p. 27.] que la 2-forme $\operatorname{Tr} R$ est fermée, i.e. $\mathrm{d} \operatorname{Tr} R = 0$.

Par conséquent, $\operatorname{Tr} R$ est localement exacte : sur tout ouvert de coordonnées locales U on a

$$\operatorname{Tr} R\Big|_U = \mathrm{d}\alpha, \qquad \text{où} \qquad \alpha = \sum_{i,k} \Gamma^k_{ik}\ \mathrm{d}x^i \in \Omega^1(U).$$

N.B. Si on change les coordonnées locales, sur $U \cup U'$ on a $\alpha' = \alpha + \mathrm{d}f$, avec $f = \log \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)$.

8.29 Lemme. *Si ∇ est une connexion à torsion nulle, on a*

$$\mathrm{Ric}\,(X,Y) - \mathrm{Ric}\,(Y,X) = \mathrm{Tr}\,R(X,Y).$$

Par conséquent, ∇ est Ricci-symmétrique, i.e. $\mathrm{Ric}\,(X,Y) = \mathrm{Ric}\,(Y,X)$*, si et seulement si les primitives locales $\alpha \in \Omega^1(U)$ de $\mathrm{Tr}\,R$ sont fermées, i.e.* $\mathrm{d}\alpha = 0$.

Preuve. Postnikov, Ch. 2, p.27-28. □

8.30 Proposition. (Formule de Foss-Weyl) *Si R est la courbure de la connexion de Levi-Civita, les primitives locales $\alpha \in \Omega^1(U)$ de $\mathrm{Tr}\,R$ sont exactes, et plus précisement*

$$\alpha = \mathrm{d}\ln\sqrt{|\det\eta|}.$$

Preuve. Postnikov, Ch.13, p.160. □

8.31 Corollaire. *Si M est une varieté (pseudo-)riemannienne avec métrique η, ∇ est la connexion de Levi-Civita sur M avec courbure R, le tenseur de Ricci est symmétrique.*

Preuve. La formule de Foss-Weyl implique que les formes α sont fermées, et donc que $\mathrm{Tr}\,R = 0$.
Également, on peut prouver ce resultat en coordonnées locales : à cause des symmétries et anti-symmétries du tenseur de courbure, on a

$$R_{ij} = \sum_k R^k_{kj,i} = \sum_{k,h} \eta^{kh}\ R_{kj,ih} = -\sum_{k,h} \eta^{kh}\ R_{kj,hi} = -\sum_{k,h} \eta^{hk}\ R_{hi,kj} = \sum_{k,h} \eta^{hk}\ R_{hi,jk} = R_{ji}.$$

□

8.32 Definition. Soit M une varieté (pseudo-)riemannienne avec métrique η. On appelle **courbure scalaire** la trace du tenseur de Ricci relativement à la métrique, c'est-à-dire la fonction

$$R_{scal} := \sum_{i,j} \eta^{ij}\ R_{ij} = \sum_{i,j,k} \eta^{ij}\ R^k_{kj,i} = \sum_{i,j,k} \eta^{ij}\ \eta^{kh}\ R_{jh,ik} \in C^\infty(M).$$

8.33 Exemple. Si M est une surface de $\mathbb{R}^3$, la courbure scalaire est le double de la courbure de Gauss : $R_{scal} = 2K$.

9 Groupes et algèbres de Lie

9.1 Groupes de Lie

9.1 Definition. Un **groupe de Lie** est une varieté différentiable G qui est aussi un groupe tel que la loi de groupe $G \times G \longrightarrow G : \quad (g,h) \mapsto gh$ et l'inversion $G \longrightarrow G : \quad g \mapsto g^{-1}$ soient des applications différentiable. Notons e l'élément neutre du groupe. On appelle **dimension** du groupe de Lie sa dimension en tant que varieté différentiable.

9.2 Exemples.
1. Les groupes additifs $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ (vu comme varieté différentiable réelle).
2. Les tores $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$.
3. Tous les sous-groupes des groupes linéaires $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ des matrices inversibles. En particulier, les groupes : special linéaire $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$, orthogonal $O(n)$ et special orthogonal $SO(n)$, unitaire $U(n)$ et special unitaire $SU(n)$, le groupe symplectique $Sp_{2n}(\mathbb{R})$, le groupe de Lorentz $O(1,n)$, le groupe de Heisenberg (matrices triangulaires avec des 1 sur la diagonale).
4. Les produits direct et semi-direct des groupes précédents, qui en fait sont eux-mêmes des groupes de matrices de taille supérieur. Par exemple, le groupe Euclidien $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$, le groupe de Poincaré $\mathbb{R}^{1+n} \rtimes O(1,n)$, le groupe de jauge du modéle standard $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.
5. D'autres groupes qui ne sont pas des groupes de matrices. Par exemples, pour $n > 7$, le groupe spin $Spin(n)$ des éléments inversibles dans l'algèbre de Clifford $Cl(n)$, qui est le revêtement double de $SO(n)$ (et aussi son revêtement universel car il est simplement connexe).
   Un autre exemple est le groupe metaplectique $Mp_{2n}(\mathbb{R})$, qui est le revêtement double de $Sp_{2n}(\mathbb{R})$.

9.3 Definition. Un **sous-groupe de Lie** d'un groupe de Lie G est à la fois une sous-variété et un sous-groupe de G, qui est lui même un groupe de Lie avec la structure différentielle heritée de G.

9.4 Exemples.
1. Les sous-groupes de matrices de $GL_n(\mathbb{R})$ sont des sous-groupes de Lie.
2. Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{C})$. Et en identifiant $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ on a aussi que $GL_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de Lie de $GL_{2n}(\mathbb{R})$.

9.2 Champs de vecteurs invariants et algèbre de Lie

9.5 Definition. Soit G un groupe de Lie. Pour tout $g \in G$, on appelle **translation à gauche** le difféomorphisme

$$L_g : G \longrightarrow G, \qquad h \longmapsto L_g(h) := gh$$

induit par le produit sur G. Analoguement, on appelle **transaltion à droite** le difféomorphisme sur G défini par $R_g(h) := hg$.

Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(G)$ est **invariant à gauche** si on a

$$L_g^*(X) = X, \qquad \text{pour tout } g \in G,$$

où $L_g^* : \mathfrak{X}(G) \longrightarrow \mathfrak{X}(G)$ est le pull-back de L_g sur les champs de vecteurs de G, c'est-à-dire l'application définie par

$$L_g^*(X)(h) = (\mathrm{d}L_g)_h^{-1}(X_{gh}), \qquad X \in \mathfrak{X}(G), \quad h \in G,$$

où

$$(\mathrm{d}L_g)_h : T_h(G) \longrightarrow T_{gh}(G), \qquad X_h = \gamma'(0) \longmapsto (\mathrm{d}L_g)_h(X_h) = (L_g \circ \gamma)'(0)$$

est la différentielle de L_g en $h \in G$. Autrement dit, sachant qu'en générale $(\mathrm{d}L_g)_h(X_h)$ est un vecteur tangent à G au point gh, un champ X est invariant à gauche si ce vecteur est exactement X_{gh}. Un tel champ est déterminé completement par sa valeur en e, car pour tout $g \in G$ on a $X_g = (\mathrm{d}L_g)_e(X_e)$.

9.6 Proposition. *Le fibré tangent à un groupe de Lie est toujours trivial.*

Preuve. En effet, à partir d'une base quelconque $A^1, ..., A^k$ de l'espace tangent T_eG (où k est la dimension de G), on peut construir k sections globales non nulles de TG en utilisant la translation à gauche. □

9.7 Proposition. *Le sous-espace de $\mathfrak{X}(G)$ des champs invariants à gauche est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}(G)$, qu'on note* Lie(G) *ou* $\mathfrak{g}$. *La dimension de* Lie(G)*, en tant qu'algèbre de Lie, est égale à la dimension de G.*

Preuve. En effet, en vertu de l'Exercice 4.11 on sait que le push forward d'un difféomorphisme sur les champs de vecteurs preserve le crochet de Lie des champs. Si X et Y sont deux champs invariants à gauche, on a donc

$$L^*\big([X,Y]\big) = \big[L^*(X), L^*(Y)\big] = [X,Y].$$

Comme espace vectoriel, Lie(G) est isomorphe à l'espace tangent $T_e(G)$: l'isomorphisme est donné par l'application qui associe à un vecteur $A \in T_eG$ le champ de vecteurs $X : g \mapsto X_g := (\mathrm{d}L_g)_eA$. Par conséquent, Lie($G$) a la même dimension de G. □

9.8 Exemples. 1. $\mathrm{Lie}(GL_n(\mathbb{R})) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \cong M_n(\mathbb{R})$;

2. $\mathrm{Lie}(SL_n(\mathbb{R})) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \cong \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}\, A = 0\}$.

9.9 Definition. Une forme différentielle $\omega \in \Omega^1(G)$ est **invariante à gauche** si pour tout $g \in G$ on a $L_g^*(\omega) = \omega$, où

$$L_g^* : \Omega^1(G) \longrightarrow \Omega^1(G), \qquad L_g^*(\omega)(h) = (\mathrm{d}L_g)_h^*(\omega_{gh})$$

est le pull-back de L_g sur les formes de G, et $(\mathrm{d}L_g)_h^* : T_{gh}^*(G) \longrightarrow T_g^*(G)$ est l'application adjointe de la différentielle de L_g en $h \in G$.

L'ensemble des 1-formes différentielles invariantes à gauche est un espace vectoriel isomorphe à l'espace des champs invariants à gauche, c'est-à-dire $\mathfrak{g}^*$.

De plus, si $\omega \in \mathfrak{g}^*$ represente une 1-forme invariante à gauche, la 2-forme $\mathrm{d}\omega$ est aussi invariante à gauche, donc $\mathrm{d}\omega \in \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*$.

9.3 Application exponentielle

Soit G un groupe de Lie, et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Pour tout $A \in \mathfrak{g}$ (vu comme champ invariant à gauche), notons ϕ_t^A le flot de A et $\exp(tA) = \phi_t^A(e)$ l'application exponentielle en e, caracterisée par les proprietés suivantes :

$$\begin{aligned}
&\exp(0) = e \\
&\exp(sA)\exp(tA) = \exp\big((s+t)A\big), \qquad s,t \in I \subset \mathbb{R} \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA)\Big|_{t=0} = A.
\end{aligned}$$

9.10 Proposition. *Pour tout $A \in \mathfrak{g}$, l'application exponentielle $\exp(tA)$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Preuve. Par définition, $\exp(tA) = \phi_t^A(e)$ est le point de G qu'on atteint en partant de e dans la direction A en le temps t, en suivant la courbe intégrale de A. Ce point se trouve donc dans un entourage de e, dont la grandeur est donnée par l'interval de définition des courbes intégrales de A. En utilisant la proprieté $\phi_t^A \circ \phi_s^A = \phi_{t+s}^A$, on peut recoller les courbes intégrales de A, définies chacune autour d'un point de G sur des petits intervals de temps, en une courbe intégrale définie sur interval de temps plus grand. Devoir arreter ce prolongement en un temps t est équivalent donc à rencontrer une zone de G sur laquelle les courbes intégrales locales ne sont pas définie. Autrement dit, dire que le flot en e, $\phi_t^A(e) = \exp(tA)$, est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ est équivalent à dire que le flot ϕ_t^A est défini sur un interval limité mais globalement pour tout point $g \in G$.

Or, si G est un groupe de Lie, le flot ϕ_t^A est défini sur tout G et on a $\phi_t^A = R_{\exp(tA)}$, où R est la translation à droite, i.e.

$$\phi_t^A(g) = g\exp(tA), \qquad g \in G.$$

Ceci suit du fait que ϕ_t^A commute avec toute translation à gauche L_g, car dans ce cas

$$\phi_t^A(g) = \phi_t^A(ge) = g\phi_t^A(e) = g\exp(tA), \qquad g \in G.$$

Pour montrer que $\phi_t^A \circ L_g = L_g \circ \phi_t^A$ pour tout $g \in G$, calculons $\phi_t^A\big(L_g(h)\big)$ et $L_g\big(\phi_t^A(h)\big)$ pour tout $h \in G$.

D'un coté, soit $\alpha(t) = \phi_t^A(h)$ la courbe intégrale de A au départ de h. Alors

$$\phi_t^A(h) = \alpha(t), \qquad \alpha(0) = h, \qquad \alpha'(0) = A_h = L_h^*(A) = A, \qquad \text{[DESSIN]}$$

et donc

$$g\phi_t^A(h) = g\alpha(t), \qquad g\alpha(0) = gh, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g\alpha(t))\Big|_{t=0} = L_g^*(A) = A$$

De l'autre coté, soit $\beta(t) = \phi_t^A(gh)$ la courbe intégrale de A au départ de gh. Alors

$$\phi_t^A(gh) = \beta(t), \qquad \beta(0) = gh, \qquad \beta'(0) = A_{gh} = L_{gh}^*(A) = A. \qquad \text{[AJOUTER AU DESSIN]}$$

Au point gh on a donc deux courbes intégrales $g\alpha(t)$ et $\beta(t)$ qui demarrent dans la même direction A : par l'unicité de la solution d'une équation différentielle du 1er ordre avec condition initiale, ces deux courbes coincident. On a donc

$$\phi_t^A(gh) = \beta(t) = g\alpha(t) = g\phi_t^A(h), \qquad g,h \in G.$$

□

9.4 Actions adjointes

9.11 Definition. Pour tout $g \in G$, on appelle **application adjointe sur** G l'isomorphisme de groupes

$$\mathrm{Ad}_g : G \longrightarrow G, \quad h \longmapsto \mathrm{Ad}_g(h) := ghg^{-1}.$$

On définie ainsi l'**action adjointe de** G **sur** G comme l'application différentiable

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Diff}\,(G), \; g \mapsto \mathrm{Ad}_g.$$

On indique parfois par G^{Ad} le groupe G sur lequel G agit avec l'application adjointe, i.e. $G \times G^{\mathrm{Ad}} \longrightarrow G^{\mathrm{Ad}}, \; (g,h) \mapsto ghg^{-1}$.

On appelle ensuite **action adjointe de** G **sur** $\mathfrak{g}$ la différentielle de Ad_g en e pour tout $g \in G$, c'est-à-dire l'isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{Ad}_g = (\mathrm{dAd}_g)_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$. On a donc une application différentiable

$$\mathfrak{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g}) \cong GL(\mathfrak{g}), \quad g \mapsto \mathfrak{Ad}_g := (\mathrm{dAd}_g)_e.$$

Pour tout $A \in \mathfrak{g}$, on appelle enfin **action adjointe de** $\mathfrak{g}$ **sur** $\mathfrak{g}$ la différentielle de Ad en e, c'est-à-dire l'isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{ad} := \mathrm{dAd}_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \; A \mapsto \mathfrak{ad}_A.$$

9.12 Proposition. *Pour tout $A, B \in \mathfrak{g}$, on a* $\mathfrak{ad}_A(B) = [A,B]$.

Preuve. Soit ϕ_t^A le flot de A, alors $(\phi_t^A)^{-1} = \phi_{-t}^A$, et pour tout $g \in G$ on a $\phi_t^A(g) = g\exp(tA)$. Il en suit que

$$\big((\phi_t^A)^* B\big)_g = \mathrm{d}(\phi_t^A)_g^{-1}(B_{\phi_t^A(g)}) = (\mathrm{d}\phi_{-t}^A)_g(L^*_{\phi_t^A(g)}(B)) = \big((\phi_{-t}^A)_*\big)_g(L^*_{g\exp(tA)}(B)),$$

où $(\phi_t^A)^*$ est le pull back et $(\phi_{-t}^A)_*$ est le push forward du flot. Rappellons que si $\mathcal{L}$ est la derivée de Lie des champs de vecteurs, définie en tout $g \in G$ comme la dérivée

$$\mathcal{L}_A(B)_g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((\phi_t^A)^* B\big)_g \Big|_{t=0},$$

on a $\mathcal{L}_A(B)_g = [A,B]_g$. Puisque $B = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\exp(sB)\Big|_{s=0}$, on a alors

$$\begin{aligned}
[A,B] = [A,B]_e = \mathcal{L}_A(B)_e &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((\phi_{-t}^A)_*\big)_e \big(L^*_{\exp(tA)}(B)\big)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((\phi_{-t}^A)_*\big)_e \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\exp(tA)\exp(sB)\right)\Big|_{t,s=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(\exp(tA)\exp(sB)\exp(-tA)\Big)\Big|_{t,s=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathfrak{Ad}_{\exp(tA)}\big(\exp(sB)\big)\Big|_{t=0} = \mathfrak{ad}_A(B).
\end{aligned}$$

□

9.5 Métrique invariante

9.13 Definition. Une métrique $\eta : \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \longrightarrow C^\infty(M)$ est **invariante à gauche** si, pour tout $g \in G$, la translation à gauche L_g est une isométrie sur G, i.e.

$$\eta\big(L_g^*(X), L_g^*(Y)\big) = \eta(X,Y), \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(G).$$

De même, une métrique $\eta : \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \longrightarrow C^\infty(M)$ est **invariante à droite** si, pour tout $g \in G$, la translation à droite $R_g : G \longrightarrow G : \; h \mapsto R_g(h) = hg$ est une isométrie sur G. Une métrique s'appelle **bi-invariante** si elle est invariante à gauche et à droite.

9.14 Proposition. *Sur tout groupe de Lie il existe une métrique invariante à gauche.*

Preuve. On part du produit scalaire Euclidien sur $T_eG = \mathfrak{g}$ et on le prolonge aux autres espaces tangents en utilisant la translation à gauche. Plus précisement, pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$, on pose

$$\begin{aligned}
&\eta_e(X_e, Y_e) = \langle X_e, Y_e \rangle, \\
&\eta_g(X_g, Y_g) = \eta_e\Big(\big(\mathrm{d}L_{g^{-1}}\big)_g X_e, \big(\mathrm{d}L_{g^{-1}}\big)_g Y_e\Big), \qquad g \in G.
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que cette métrique est invariante à gauche. □

9.15 Lemme. *Une métrique η invariante à gauche sur G est bi-invariante si et seulement si*

$$\eta([X,Z],Y) = \eta(X,[Y,Z]), \qquad X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Preuve. [Do Carmo RG p.40] □

9.16 Proposition. *Sur tout groupe de Lie compact il existe une métrique bi-invariante.*

Preuve. [Do Carmo RG p.41] □

10 Action d'un groupe de Lie sur une varieté

10.1 Action d'un groupe de Lie sur une varieté

10.1 Definition. Soit P une varieté différentiable et G un groupe de Lie. On dit que G **agit sur** P **à droite** s'il existe une application différentiable $P \times G \longrightarrow P$, $\quad (p, g) \mapsto pg$, appellée **action**, telle que

$$\begin{aligned} &(pg)h = p(gh), \qquad p \in P, \qquad g, h \in G \\ &pe = p, \qquad p \in M. \end{aligned}$$

Alternativement, une action est un morphisme de groupe $R : G \longrightarrow \operatorname{Diff}(P)$, $g \mapsto R_g$, avec $R_g(p) = pg$, qui est différentiable, et qu'on appelle **translation à droite**. Dans ce cas, on dit que R **est une representation de** G **comme difféomorphismes de** P, ou que G agit comme **groupe de transformations de** P.

10.2 Exemple. 1. Le groupe $U(1)$ agit sur $\mathbb{S}^1$ par multiplication, car $U(1) \simeq \mathbb{S}^1$.
2. Les groupes $GL_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ agissent sur $\mathbb{R}^n$; les groupes $GL_n(\mathbb{C})$ et $SU_n(\mathbb{C})$ agissent sur $\mathbb{C}^n$.

10.2 Espace des orbites

10.3 Definition. Si G agit sur P, pour tout $p \in P$ on appelle **orbite de** p le sous-ensemble

$$pG := \{pg \in P,\ g \in G\} \subset P$$

qui est stable par l'action de G. On appelle **espace des orbites** l'ensemble

$$P/G := \{pG \subset P,\ p \in P\}.$$

L'espace des orbites n'est pas toujours une varieté. Par exemple, les orbites de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ sont deux : une est le point 0, l'autre est $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. L'espace $\mathbb{R}^n/GL_n(\mathbb{R})$ a donc deux points, et n'est pas une varieté.

En général, dans le quotient P/G on peut avoir deux types de problèmes :
– les orbites peuvent avoir dimensions differentes, et donc sur P/G il n'y a pas d'atlas ;
– les orbites peuvent être ouvertes, et donc dans P/G il y a des points qui ne se separent pas.

10.4 Definition. Une action de G sur P est **transitive** si elle possède une seule orbite : pour tout $p, q \in P$ il existe un $g \in G$ tel que $q = pg$. Dans ce cas P/G est un point.

10.5 Definition. Si G agit sur P, pour tout $p \in P$ on appelle **stabilisateur de** p le sous-ensemble $G_p := \{g \in G,\ pg = p\}$ de G, qui est un sous-groupe fermé de G.

On appelle **espace homogène** le quotient G/G_p, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence $\bar{g}$ pour tout $g \in G$, dans la relation $g \sim gh$ si $h \in G_p$.

10.6 Proposition. *Pour tout $p \in P$, l'espace homogène G/G_p est difféomorphe à l'orbite pG, via l'application*

$$G/G_p \longrightarrow pG, \qquad \bar{g} \mapsto pg.$$

Preuve. L'application $G/G_p \longrightarrow pG$ est une bijection, car les stabilisateurs de deux éléments de la même orbite sont isomorphes. En effet, fixons $p, q \in P$ dans la même orbite, alors il existe $h \in G$ tel que $q = ph$. Les stabilisateurs G_p et G_{ph} sont isomorphes parce que le groupe G_p est isomorphe à $h^{-1}G_p h$ qui, lui, est égal à G_{ph} car

$$g \in G_{ph} \quad \Leftrightarrow \quad phg = ph \quad \Leftrightarrow \quad p(hgh^{-1}) = p \quad \Leftrightarrow \quad hgh^{-1} \in G_p \quad \Leftrightarrow \quad g \in h^{-1}G_p h.$$

Le fait qu'elle soit un difféomorphisme suit du fait que l'action de G sur P est différentiable. □

10.7 Corollaire. *Pour tout $p \in P$, le groupe G agit sur l'espace homogène G/G_p de façon transitive.*

Preuve. L'action de G sur G/G_p est celle naturelle : pour tout $\bar{g} \equiv pg \in G/G_p \cong pG$ et pour tout $h \in G$ on pose $\bar{g} \cdot h := \bar{gh} \equiv pgh$. Cette action n'a qu'une orbite : pour tout $\bar{g_1}, \bar{g_2} \in G/G_p$, si on pose $h = g_2^{-1} g_1$ on a évidement $\bar{g_2} \cdot h \equiv pg_2 h = pg_1 \equiv \bar{g_1}$. □

10.8 Definition. Une action de G sur P est **fidèle**, ou **effective**, si l'intersection des stabilisateurs de tous les éléments est triviale : $\cap_{p \in P} G_p = \{e\}$. Autrement dit, si la translation à droite $R : G \longrightarrow \operatorname{Diff}(P)$ est injective, et donc G **est un sous-groupe de** $\operatorname{Diff}(P)$.

Une action de G sur P est **libre** si tous les stabilisateurs sont triviaux : pour tout $p \in P$ on a $G_p = \{e\}$. Autrement dit : si $pg = p$ pour quelque $p \in P$ alors $g = e$. Ceci signifie que G **agit sans points fixes**, on dit aussi que G **agit librement**. Une action libre est évidemment fidèle.

10.9 Corollaire. *Pour une action libre, toute orbite est difféomorphe à G.*

Preuve. Pour tout $p \in P$ on a $pG \cong G/G_p = G$ car $G_p = \{e\}$. □

10.10 Definition. Une action de G sur P est **propre** si l'application

$$P \times G \longrightarrow P \times P, \qquad (p,g) \longmapsto (pg,p)$$

est propre, c'est-à-dire que l'image réciproque d'un compact est compacte. Cette condition garantit que si pg se trouve dans un entourage de p, alors g n'est pas trop gros.

10.11 Proposition. *Si l'action de G sur P est libre et propre, l'espace des orbites P/G est une varieté et l'application de passage au quotient $\pi : P \longrightarrow P/G :\ p \mapsto pG$ est une submersion.*

Preuve. O. Mathieu. Chercher une ref. □

10.3 Applications G-équivariantes

10.12 Definition. Si un groupe de Lie G agit sur deux varietés P et P', une application différentiable $\phi : P \longrightarrow P'$ est **G-équivariante** si elle commute avec l'action de G, i.e.

$$\phi(pg) = \phi(p)g, \qquad p \in P, \quad g \in G.$$

Soit $C^\infty_G(P, G^{\mathrm{Ad}})$ l'ensemble des applications différentiables et G-équivariantes de P vers G, où G agit sur lui-même avec l'action adjointe, i.e.

$$C^\infty_G(P, G^{\mathrm{Ad}}) := \Big\{ f : P \longrightarrow G,\ f(pg) = gf(p)g^{-1},\ p \in P,\ g \in G \Big\}.$$

10.13 Proposition. *L'ensemble $C^\infty_G(P, G^{\mathrm{Ad}})$ est un groupe, avec produit $(ff')(p) = f(p)f'(p)$, unité $p \mapsto e_G$ et inverse $f^{-1}(p) = \big(f(p)\big)^{-1}$.*

Preuve. Evidement l'unité $p \mapsto e_G$ est G-équivariante. Si $f, f' \in C^\infty_G(P, G^{\mathrm{Ad}})$, pour tout $g \in G$ et tout $p \in P$ on a

$$(ff')(pg) = f(pg)f'(pg) = gf(p)g^{-1}gf'(p)g^{-1} = gf(p)f'(p)g^{-1} = g(ff')(p)g^{-1},$$

donc $ff' \in C^\infty_G(P, G^{\mathrm{Ad}})$. De même, si $f^{-1}(p)f(p) = e_G$, on a

$$f^{-1}(pg) = \big(gf(p)g^{-1}\big)^{-1} = gf^{-1}(p)g^{-1},$$

car

$$\Big(gf^{-1}(p)g^{-1}\Big)\Big(gf(p)g^{-1}\Big) = gf^{-1}(p)f(p)g^{-1} = ge_Gg^{-1} = e_G,$$

donc $ff' \in C^\infty_G(P, G^{\mathrm{Ad}})$. □

10.4 Champ fondamental

10.14 Definition. Pour tout $A \in \mathfrak{g}$, on appelle **champ fondamental** sur P associé à A le champ de vecteurs

$$\begin{aligned} \hat{A} : P &\longrightarrow TP \\ p &\longmapsto \hat{A}_p := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(p \exp(tA)\big)\Big|_{t=0} \in T_pP. \end{aligned}$$

10.15 Proposition. *Si G est un groupe de Lie connexe qui agit sur P, l'application*

$$\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P), \qquad A \longmapsto \hat{A}$$

est un morphisme d'algèbres de Lie. Par conséquent, l'image $\hat{g} = \Big\{ \hat{A} \in \mathfrak{X}(P) \mid A \in \mathfrak{g} \Big\}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}(P)$.

Si en plus l'action de G sur P est effective, on a $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{X}(P)$.

Enfin, si l'action de G sur P est libre, pour tout $A \neq 0$ le champ $\hat{A}$ ne s'annulle pas.

Preuve. Nomizu p.17. Ici il manquent des lemmes sur $[X, Y]$ dans la section 4. □

11 Fibrés principaux et fibrés associés

11.1 Fibré principal de groupe G

Soit M une varieté de dimension m et G un groupe de Lie de dimension k.

11.1 Definition. Un **fibré principal de groupe G sur M**, ou **G-fibré principal**, est un fibré $P(M,G)$ de fibre G tel que :

1. Le groupe G agit à droite sur P sans points fixes.
   Par conséquent, il y a une action $P \times G \longrightarrow P,\ (p,g) \mapsto pg$ telle que $pg = p \ \Rightarrow g = e$ (et donc $G \hookrightarrow \mathrm{Diff}\,(P)$), et toute orbite pG est difféomorphe à G.
2. La varieté M est difféomorphe à l'espace des orbites P/G.
   Par conséquent, la projection est donnée par la composée $\pi : P \longrightarrow P/G \xrightarrow{\cong} M$ et pour tout $x \in M$ la fibre $P_x = \pi^{-1}(x)$ est difféomorphe à l'orbite $\pi^{-1}(x)G$ (et donc à G).
3. Les trivialisation locales $\tau_r : P_{U_r} := \pi^{-1}(U_r) \longrightarrow U_r \times G$ sont G-équivariantes.
   Par conséquent, pour tout $p \in P_{U_r}$ on a $\tau_r(p) = (\pi(p), \tilde{\tau}_r(p))$ et la fonction $\tilde{\tau}_r : P_{U_r} \longrightarrow G$ commute avec l'action de G,
$$\tilde{\tau}_r(pg) = \tilde{\tau}_r(p)g, \qquad g \in G.$$

11.2 Exemples. 1. Le **fibré principal trivial de groupe G sur M** est le fibré $P = M \times G$ avec projection
$$\pi : P = M \times G \longrightarrow M, \qquad \pi(x,g) = x.$$

2. Le cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ est un fibré principal de groupe $\mathbb{S}^1$ sur la droite $\mathbb{R}$. De même, le tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ est un fibré de groupe $\mathbb{S}^1$ sur le cercle. [DESSIN]
3. Si H est un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie G, et G/H est l'espace homogène, l'application quotient $\pi : G \longrightarrow G/H$ est un fibré principal sur G/H de groupe H.
   Par exemple, si $G = SU(2)$ et $H = U(1)$, on obtient la **fibration de Hopf** :
$$\pi : \mathbb{S}^3 \cong SU(2) \ \longrightarrow \ SU(2)/U(1) \cong \mathbb{S}^2, \qquad \text{de fibre } U(1) = \mathbb{S}^1.$$
4. Un **repère** d'une varieté M en un point $x \in M$ est une base $(X_1, ..., X_m)$ de l'espace tangent T_xM. Pour tout $x \in M$, notons F_xM l'ensemble des repères en x. L'ensemble $FM = \bigcup_{x\in M} F_xM$ est un fibré principal sur M de groupe $GL_m(\mathbb{R})$ qui s'appelle **fibré des repères**. (Le symbol F rappelle la traduction anglaise de "repère" : "frame".)
   En effet, $GL_m(\mathbb{R})$ agit librement à droite sur FM : si $A = (a_i^j) \in GL_m(\mathbb{R})$ et $(X_1, ..., X_m) \in F_xM$, on pose
$$(X_1, ..., X_m)A := \Big(\sum_{i=1}^m a_1^i X_i, ..., \sum_{i=1}^m a_m^i X_i \Big) \in F_xM.$$
   Cette action est évidemment libre : si $(X_1, ..., X_m)A = (X_1, ..., X_m)$ on a $A = 1$.
   Si (U, φ) est une carte de M avec coordonnées $\varphi(x) = (x^1, ..., x^m)$, les coordonnées locales d'un repère $(X_1, ..., X_m)$ dans L_UM sont les m^2 coéfficients $X_i^j = X_i^j(x^1, ..., x^m) \in \mathbb{R}$ des vecteurs tangents, i.e. les nombres tels que
$$X_i = \sum_{j=1}^m \ X_i^j(x^1, ..., x^m)) \ \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x .$$
5. Le fibré principal de groupe $U(1)$ sur la varieté de Minkowski $\mathbb{M}$ est l'ingrédient principal de la théorie éléctromagnetique du modèle standard. Analoguement, le fibré de groupe $U(1) \times SU(2)$ est à la base de la théorie électrofaible (force éléctromagnétique plus intéraction faible) et le fibré de groupe $SU(3)$ à la base de la théorie chromodynamique (l'intéraction forte). Au total, le modéle standard, qui réunit ces intéractions, se base sur le fibré principal de groupe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ sur $\mathbb{M}$.
   Les champs de ces théories, qui s'appellent champs de Yang-Mills et décrivent les mediateurs des forces en théorie quantique des champs (les bosons), sont les connexions principales sur ces fibrés, qu'on verra dans la suite.

Si $P = M \times G$ est le fibré trivial de groupe G sur M, les sections de P sont les applications différentiables de M vers G , i.e. $\Gamma(P) = C^\infty(M,G)$. Si P est un G-fibré non trivial, l'ensemble des sections de P n'a pas de structure algébrique particulière, mais il est lié aux trivialisations locales comme cela arrive pour les fibrés vectoriels.

11.3 Proposition. *Il y a une correspondance bijective entre sections locales et trivialisations locales de $\pi : P \longrightarrow M$. Par conséquent, un fibré principal est trivial si et seulement si il admet une section globale.*

Preuve. Soit $\tau_U : P_U \longrightarrow U \times G$ une trivialisation locale G-équivariante. On défini une section $s : U \longrightarrow P$ en posant $s(x) = \tau_U^{-1}(x,e)$.
Inversement, soit $s : U \longrightarrow P$ une section locale, telle que $s(x) \in P_x$ pour tout $x \in U$. On défini une trivialisation $\tau_U : P_U \longrightarrow U \times G$ en posant $\tau_U(p) = (x,g)$ où $x = \pi(p)$ et $p = s(x)g$. L'élément g existe car $P_x = s(x)G$ est une orbite entière, et il est unique car l'action de G sur P est libre. □

11.2 Groupe structural d'un fibré principal

Soit $\{U\}$ un recouvrement de M supportant des trivialisations locales τ_U, et pour toute paire d'ouverts U, V tels que $U \cap V \neq \emptyset$, soit $g_{UV} : U \cap V \longrightarrow \mathrm{Diff}\, G$ la fonction de transition, définie en $x \in U \cap V$ comme

$$g^x_{UV}(h) = \tilde\tau_U \circ \tilde\tau_V^{-1}(h), \qquad h \in G,$$

où $\tau_U(p) = (x, \tilde\tau_U(p))$ pour tout $p \in P_x$.

11.4 Proposition. *La fonction de transition g^x_{UV} agit sur G comme multiplication à gauche par l'élément $\tilde\tau_U(p)(\tilde\tau_V(p))^{-1} \in G$, c'est-à-dire*

$$g^x_{UV}(h) = \tilde\tau_U(p)\left(\tilde\tau_V(p)\right)^{-1} h, \qquad h \in G.$$

Par conséquent, le groupe structural d'un G-fibré principal est le groupe G même.

Preuve. D'abord montrons que pour tout $x \in U \cap V$ et pour tout $h \in G$ la valeur $\tilde\tau_U(p)(\tilde\tau_V(p))^{-1}h$ ne depend pas de $p \in P_x$ mais seulement de x. En effet, si $p \in P_x$, tout autre point de P_x est de la forme pg avec $g \in G$, et on a

$$\tilde\tau_r(pg)\tilde\tau_s(pg)^{-1} = \tilde\tau_r(p)g\Big(\tilde\tau_s(p)g\Big)^{-1} = \tilde\tau_r(p)gg^{-1}\tilde\tau_s(p)^{-1} = \tilde\tau_r(p)\tilde\tau_s(p)^{-1}.$$

Montrons maintenant que $\tilde\tau_U(p)\big(\tilde\tau_V(p)\big)^{-1}h$ est égal à $\tilde\tau_U \circ \tilde\tau_V^{-1}(h)$. Pour cela, observons que puisque $\tilde\tau$ est G-équivarante, sa réciproque $\tilde\tau^{-1}$ l'est aussi. En effet, si on pose $h = \tilde\tau(p)$ et $h' = \tilde\tau(pg)$, par définition de fibré principal on a $hg = \tilde\tau(p)g = \tilde\tau(pg) = h'$, et donc pour $p = \tilde\tau^{-1}(h)$ et $pg = \tilde\tau^{-1}(h')$ on a

$$\tilde\tau^{-1}(hg) = \tilde\tau^{-1}(h') = pg = \tilde\tau^{-1}(h)g.$$

Avec ça, calculons alors le produit de $\tilde\tau_U \circ \tilde\tau_V^{-1}(h)$ par l'inverse de $\tilde\tau_U(p)\big(\tilde\tau_V(p)\big)^{-1}h$:

$$\begin{aligned}
\tilde\tau_U\left(\tilde\tau_V^{-1}(h)\right)\ \Big(\tilde\tau_U(p)\left(\tilde\tau_V(p)\right)^{-1}h\Big)^{-1} &= \tilde\tau_U\Big(\tilde\tau_V^{-1}(h)\Big)\ h^{-1}\tilde\tau_V(p)\left(\tilde\tau_U(p)\right)^{-1} \\
&= \tilde\tau_U\Big(\tilde\tau_V^{-1}(h)\ h^{-1}\tilde\tau_V(p)\Big)\left(\tilde\tau_U(p)\right)^{-1} \\
&= \tilde\tau_U\Big(\tilde\tau_V^{-1}(h\,h^{-1}\tilde\tau_V(p))\Big)\left(\tilde\tau_U(p)\right)^{-1} \\
&= \tilde\tau_U\Big(\tilde\tau_V^{-1}(\tilde\tau_V(p))\Big)\left(\tilde\tau_U(p)\right)^{-1} \\
&= \tilde\tau_U(p)\left(\tilde\tau_U(p)\right)^{-1} = e.
\end{aligned}$$

Par l'unicité de l'inverse dans G on a donc la thèse.

Par définition, le groupe structural d'un fibré $P(M, G)$ est le sous-groupe de $\mathrm{Diff}\, G$ ou prennent valeurs les fonctions de transition $g_{UV} : U \cap V \longrightarrow \mathrm{Diff}\, G$. On vient de montrer que tout g^x_{UV} agit comme une multiplication à gauche, donc le groupe strauctural ne peut être que G ou un sous-groupe de G. ☐

Pour resumer, les fonctions de transition sur un fibré principal de groupe G sont donc les applications

$$g_{UV} : U \cap V \longrightarrow G, \qquad x \longmapsto g_{UV}(x) := \tilde\tau_U(p)\tilde\tau_V(p)^{-1} \quad \text{pour tout choix de } p \in P_x,$$

et ont les proprietés suivantes :

$$\begin{aligned}
&g_{UU}(x) = e, \qquad x \in U \\
&g_{UV}(x) = g_{VU}(x)^{-1}, \qquad x \in U \cap V \\
&g_{UV}(x)\ g_{VW}(x)\ g_{WU}(x) = e, \qquad x \in U \cap V \cap W.
\end{aligned}$$

Par conséquent, un G-fibré $P \longrightarrow M$ peut être reconstruit à partir des fonctions de transition, en posant

$$P = \bigcup_U (U \times G)/\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence qui identifie $(x, g) \in U \times G$ avec $(x, h) \in V \times G$ si et seulement si $g = g_{UV}(x)\ h$.

11.3 Groupe de jauge

11.5 Definition. Un **automorphisme** d'un fibré principal $\pi : P \longrightarrow M$ de groupe G est un difféomorphisme $\phi : P \longrightarrow P$ qui est G-équivariant :

$$\phi(pg) = \phi(p)g, \qquad p \in P, \quad g \in G.$$

L'application ϕ induit un difféomorphisme $\bar\phi : M \longrightarrow M$ défini par $\bar\phi\big(\pi(p)\big) := \pi\big(\phi(p)\big)$. On note $\mathrm{Aut}\,(P)$ l'ensemble des automorphismes du fibré $\pi : P \longrightarrow M$. C'est un groupe avec la composition.

Une **transformation de jauge** du fibré $\pi : P \longrightarrow M$ est un automorphisme $\phi : P \longrightarrow P$ qui preserve les fibres, $\pi\big(\phi(p)\big) = \pi(p)$, i.e. tel que $\bar\phi = \mathrm{id}_M$. On note $\mathrm{Aut}_M(P)$ l'ensemble des transformations de jauge du fibré $\pi : P \longrightarrow M$. C'est évidemment un sous-groupe de $\mathrm{Aut}\,(P)$.

Notons $G^{\mathrm{Ad}*}$ le groupe G sur lequel G agit avec l'action adjointe de l'élément inverse, i.e.

$$G \times G^{\mathrm{Ad}*} \longrightarrow G^{\mathrm{Ad}*} : \ (g,h) \mapsto g^{-1}hg.$$

Notons aussi $C^\infty_G(P, G^{\mathrm{Ad}*})$ l'ensemble des applications différentiables $f : P \longrightarrow G^{\mathrm{Ad}*}$ qui sont G-équivariantes, i.e.

$$f(pg) = g^{-1}f(p)g, \qquad p \in P, \quad g \in G.$$

Cet ensemble est évidemment un groupe, avec le produit $(ff')(p) = f(p)f'(p)$.

11.6 Proposition. *Le groupe de jauge* $\mathrm{Aut}_M(P)$ *est isomorphe au groupe* $C^\infty_G(P, G^{\mathrm{Ad}*})$.

Preuve. Si $f \in C^\infty_G(P, G^{\mathrm{Ad}*})$, on défini $\phi : P \longrightarrow P$ par $\phi(p) = pf(p)$. Alors $\phi \in \mathrm{Aut}_M(P)$ car pour tout $g \in G$ on a

$$\phi(pg) = pgf(pg) = pgg^{-1}f(p)g = pf(p)g = \phi(p)g.$$

Inversement, si $\phi \in \mathrm{Aut}_M(P)$, on défini $f : P \longrightarrow G$ sur $p \in P$ comme l'élément $f(p) \in G$ tel que $\phi(p) = pf(p)$. Un tel élément existe surment parce que ϕ preserve les fibres et donc $\phi(p)$ est dans la même orbite de p par l'action de G : si $p \in P_x$ (avec $x = \pi(p)$), on a $\phi(p) \in P_x = pG$. De plus, on a bien $f \in C^\infty_G(P, G^{\mathrm{Ad}*})$, car pour tout $p \in P$ et tout $g \in G$ on a

$$pgf(pg) = \phi(pg) = \phi(p)g = pf(p)g$$

et donc $gf(pg) = f(p)g$, i.e. $f(pg) = g^{-1}f(p)g$.
Enfin, cette bijection est un morphisme de groupes, car si $\phi, \phi' \in \mathrm{Aut}_M(P)$, avec $\phi(p) = pf(p)$ et $\phi'(p) = pf'(p)$, on a

$$\phi \circ \phi'(p) = pf'(p)f(pf'(p)) = pf'(p)\big(f'(p)\big)^{-1}f(p)f'(p) = pf(p)f'(p) = p(ff')(p).$$

□

11.7 Proposition. *La translation à droite* $R_g : P \longrightarrow P$, $p \mapsto R_g(p) = pg$ *est une transformation de jauge si et seulement si* g *est dans le centre de* G *(en particulier, si* G *est abélien).*

Preuve. En effet, $R_g(ph) = phg$ et $R_g(p)h = pgh$, donc $R_g(ph) = R_g(p)h$ pour tout $h \in G$ si et seulement si g commute avec tous les élements de G. □

11.4 Fibré associé à un fibré principal

Soit $\pi : P \longrightarrow M$ un fibré principal de groupe G.

11.8 Definition. Soit F une vareté différentiable sur laquelle G agit à gauche. On appelle **fibré de fibre F associé au fibré principal** $P(M,G)$ l'ensemble $E := P \times_G F$ des classes d'équivalence dans la relation sur $P \times F$ donnée par

$$(pg, z) \quad \sim \quad (p, gz), \qquad p \in P, \quad z \in F, \quad g \in G,$$

muni de la projection $\pi^E : E \longrightarrow M$ donnée par $\pi^E(p,z) := \pi(p)$. On peut voir E aussi comme l'espace des orbites $(P \times F)/G$ où G agit sur $P \times F$ avec l'action diagonale

$$(p,z)g := (pg, g^{-1}z), \qquad p \in P, \quad z \in F, \quad g \in G.$$

11.9 Lemme. *Le couple* (E, π^E) *forme bien un fibré sur* M.

Preuve. Pour toute trivialisation de P sur un ouvert U de M, $\tau_U : P_U \longrightarrow U \times G$, on a une application

$$\tau^E_U : E_U = P_U \times_G F \stackrel{\tau_U \times \mathrm{id}_F}{\longrightarrow} U \times G \times_G F = U \times F.$$

On défini la structure différentiable de E en supposant que tout sous-ensemble $E_U = P_U \times_G F$ soit ouvert et que l'application τ^E_U soit différentiable. Il en resulte que τ^E_U est une trivialisation locale de E. □

11.10 Proposition. *Tout fibré vectoriel sur* M *de fibre* V *et groupe structural* $G \subset GL(V)$ *est le fibré associé au fibré principal de groupe* G *sur* M.

Preuve. FINIR □

11.11 Exemples. 1. Soit FM le fibré des repères sur M, avec groupe structural $GL_m(\mathbb{R})$. Puisque $GL_m(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}^m$ avec l'action canonique

$$A(v_1, ..., v_m) = \Big(\sum_{i=1}^m a^i_1 v_i, ..., \sum_{i=1}^m a^i_m v_i\Big), \qquad A = (a^j_i) \in GL_m(\mathbb{R}), \qquad (v_1, ..., v_m) \in \mathbb{R}^m,$$

on peut considerer le fibré de fibre $\mathbb{R}^m$ associé au fibré des repères FM. Il est facile de montrer que c'est exactement le fibré tangent sur M : $\quad FM \times_{GL_m(\mathbb{R})} \mathbb{R}^m = TM$.

2. Dans la théorie géometrique du modèle standard, plusieurs champs se trouvent comme sections d'un fibré associé au fibré principal P de groupe $G = U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ sur $\mathbb{M}$.

   En particulier, les champs de la matière (fermions) qui interagissent avec les champs de Yang-Mills (bosons), sont les sections d'un fibré associé à P avec fibre donnée par un espace vectoriel opportuné V (une répresentation du groupe $Spin(2)$).
3. La relativité générale se base sur un fibré E de fibre l'espace de Minkowski $\mathbb{M}$ associé au fibré des repères FM d'une varieté orientable M de dimension 4 qui represente l'espace-temps. Le champ gravitationnel (la tetrade e) est la connexion induite sur E par une connexion particulière sur FM (la connexion spin, à torsion nulle).

Soit P un G-fibré principal sur M et V un espace vectoriel sur lequel G agit à gauche. On note $C^\infty_G(P,V)$ l'ensemble des applications différentiables $f : P \longrightarrow V$ qui sont G-équivariantes, i.e.

$$f(pg) = g^{-1} f(p), \qquad p \in P, \quad g \in G.$$

11.12 Proposition. *L'ensemble des sections du fibré vectoriel $P \times_G V$ associé à P est isomorphe à l'ensemble des fonctions G-équivariantes sur P à valeurs dans V, c'est-à-dire*

$$\Gamma(P \times_G V) \cong C^\infty_G(P,V).$$

Preuve. FINIR □

11.5 Reduction du groupe structural

11.13 Lemme. *La donnée d'un fibré principal de groupe structural G sur une varieté M est covariante en G et contravariante en M.*

Preuve.
1. Si $f : G \longrightarrow H$ est un morphisme de groupes de Lie, à tout fibré principal P de groupe G on peut associer un fibré principal f_*P de groupe H, en prenant le fibré associé à P de fibre H,

   $$f_*P = P \times_G H,$$

   où G agit sur H à gauche via f, c'est-à-dire en posant $g\,h := f(g)h$.
2. Si $\phi : N \longrightarrow M$ est une application différentiable entre deux varietés, à tout G-fibré principal P sur M on peut associer un G-fibré principal ϕ^*P sur N, en prenant

   $$\phi^*P = N \times_M P := \Big\{(y,p) \in N \times P \mid \phi(y) = \pi(p) \in M\Big\}.$$

   Ce fibré est évidemment un G-fibré, car G continue à agir à droite librement sur $N \times_M P$ sur la composante P, et l'espace des orbites $\big(N \times_M P\big)/G = N \times_M (P/G) \cong N \times_M M = N$ est difféomorphe à N.

□

La réduction du groupe structural d'un fibré principal sur M repond à la question inverse : si $f : H \longrightarrow G$ est un morphisme de groupes de Lie et P un G-fibré sur M, existe-t-il un fibré P' de groupe H sur M tel que $P = P' \times_H G$?

11.14 Definition. Soit $f : H \longrightarrow G$ un morphisme de groupes de Lie. On dit qu'un fibré P sur M de groupe G **se réduit** à un fibré P' sur M de groupe H si $P = P' \times_H G$. Dans ce cas on dit aussi que le H-fibré P' est une **réduction** du G-fibré P.

La réduction d'un G-fibré via un morphisme $f : H \longrightarrow G$ n'existe pas toujours. En particulier, elle n'existe pas forcement même quand H est un sous-groupe de Lie de G et f l'inclusion.

Soit $P(M,G)$ un fibré principal et H un sous-groupe de Lie fermé de G. Alors H agit à droite sur P avec une action libre et propre, donc l'espace des orbites P/H est une varieté. On peut alors factoriser le fibré $P \longrightarrow M$ comme $P \longrightarrow P/H \longrightarrow M$, où l'application quotient $P \longrightarrow P/H$ est un fibré principal de groupe H et $P/H \longrightarrow M$ est un fibré (non principal) de fibre l'espace homogène G/H.

11.15 Lemme. *Le G-fibré principal P admet une réduction P' à un sous-groupe fermé H de G si et seulement si le fibré P/H sur M admet une section globale.*

Preuve. En effet, à partir du fibré principal $\pi^H : P \longrightarrow P/H$ de groupe H, une section $\sigma : M \longrightarrow P/H$ permet de définir un fibré sur M de groupe H, comme l'espace

$$M \times_{P/H} P := \Big\{(x,p) \in M \times P \mid \sigma(x) = \pi^H(p) \in P/H\Big\}.$$

Ce fibré est une réduction de P de groupe H, car

Viceversa, □

11.16 Proposition. *Si K est un sous-groupe compact maximal de G, tout fibré principal sur G se réduit à un fibré sur K.*

Preuve. Soit $P \longrightarrow M$ un fibré principal de groupe G. Par le Lemme précédent, il suffit de montrer que le fibré $P/K \longrightarrow M$ admet une section. Ceci est conséquence du fait que la fibre G/K de P/K est contractile (résultat difficile qu'on ne prouve pas ici). □

11.17 Exemples. Soit FM le fibré des repères sur une varieté M, avec groupe structural naturel $GL_m(\mathbb{R})$.

1. Puisque $O(n)$ est le sous-groupe compact maximal de $GL_m(\mathbb{R})$, le fibré FM se réduit au fibré des repères orthonormaux de groupe $O(m)$.

   Ceci correspond au fait que sur toute varieté différentiable (de Hausdorff et paracompacte) il existe une métrique riemannienne, preservée sur les repères par l'action du groupe $O(m)$.
2. La varieté M est orientable si et seulement si le fibré FM se réduit à un fibré de groupe $GL_m^+(\mathbb{R})$, et par conséquence aussi au fibré des repères orthonormaux directs de groupe $SO(m)$.
3. La varieté M admet une métrique pseudo-riemannienne de signature (p, q) si et seulement si le fibré FM se réduit à un fibré de groupe $O(p) \times O(q) \subset O(p, q)$.

   Analoguement, si M est orientable, elle admet une métrique pseudo-riemannienne de signature (p, q) si et seulement si le fibré FM se réduit à un fibré de groupe $SO(p) \times SO(q) \subset SO(p, q)$.
4. La varieté M admet une structure spin si et seulement si le fibré FM se réduit à un fibré de groupe $Spin(m)$, via l'application de revètement double $Spin(m) \longrightarrow SO(m)$.
5. Dans le modèle standard, on a déja mentionné le fait que les mediateurs des forces sont des connexions sur des fibrés principaux, et que les champs de la matière sont des sections de certeins fibrés vectoriels associés à ces fibrés principaux.

   Les autres champs qui apparaissent dans le modèle standard, par "brisure de symmétrie", s'expliquent avec des réduction du groupe structural d'origine $G = U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ à un sous-groupe fermé H. En effet, comme on l'a vu au Lemme (11.15), la réduction d'un G-fibré P à H est équivalente à une section $M \longrightarrow P/H$, qui represente le champ de Higgs.

12 Connexions principales et courbure

12.1 Connexions sur un fibré principal

Soit P un fibré principal sur M de groupe G.

Pour tout $p \in P$ tel que $\pi(p) = x \in M$, la fibre P_x coincide avec l'orbite pG et est donc difféomorphe à G (non canoniquement). L'espace tangent vertical T_pP_x est donc isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Puisque, pour tout $A \in \mathfrak{g}$, le champ fondamental $\hat{A} \in \hat{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{X}(P)$ est un champ vertical, i.e. pour tout $p \in P$ on a

$$\hat{A}_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(p\exp(tA)\big)\Big|_{t=0} \in T_pP_x$$

car $p\exp(tA) \in pG$ pour tout t, on a évidemment $T_pP_x = \hat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}$.

Comme on l'a dit au chapitre 6, le choix d'un champ d'espaces horizontaux $p \longmapsto H_p \subset T_pP$ est équivalent au choix pour tout $p \in P$ d'une projection ω_p de T_pP sur l'espace vertical $T_pP_x = \hat{\mathfrak{g}}$ telle que $H_p = \mathrm{Ker}(\omega_p)$. Via l'isomorphisme $\hat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}$, l'application $p \longmapsto \omega_p$ donne évidemment une 1-forme sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}$.

12.1 Definition. Une **connexion** ou **connexion principale** sur P est une 1-forme $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ à valeur dans l'algèbre de Lie de G, telle que

1. ω reproduit les générateurs des champs fondamentaux sur P, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathfrak{g}$ on a
$$\omega(\hat{A}) = A;$$
2. ω est G-équivariante, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, on a
$$R_g^*(\omega) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\,\omega,$$
ce qui signifie que pour tout $p \in P$ et tout $X_p \in T_pP$ on a $\omega_{pg}\big((\mathrm{d}R_g)_p(X_p)\big) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big(\omega_p(X_p)\big)$.

Il est donc évident que la différence de deux connexions ω et ω' sur P est une 1-forme sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui est G-équivariante et **horizontale**, c'est-à-dire qu'elle annulle tous les champs verticaux :

$$(\omega - \omega')(\hat{A}) = 0, \qquad \text{pour tout } A \in \mathfrak{g}.$$

12.2 Proposition. *Il y a une correspondance bijective entre connexions sur $P(M,G)$ et champs d'espaces horizontaux* ***G-invariants*** *sur P, c'est-à-dire champs $H : p \mapsto H_p \subset T_pP$ tels que pour tout $p \in P$ et $g \in G$ on a*

$$(R_g)_*(H_p) = (\mathrm{d}R_g)_p(H_p) = H_{pg}.$$

Preuve. Supposons que ω soit une connexion sur P. Pour tout $p \in P$, posons $H_p = \{X_p \in T_pP \mid \omega_p(X_p) = 0\}$. Puisque $\omega(\hat{A}) = A$ pour tout $\mathcal{A} \in \mathfrak{g}$, on a $H_p \oplus T_pP_x = T_pP$. Evidemment l'application $p \longmapsto H_p$ est un champ différentiable d'espaces horizontaux. Ces espace sont G-invariants, parce que pour tout $g \in G$ et tout $X_p \in H_p$ on a

$$\omega_{pg}\big((\mathrm{d}R_g)_p(X_p)\big) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big(\omega_p(X_p)\big) = 0,$$

et donc $(R_g)_*(X_p) \in H_{pg}$.
Inversement, supposons que $p \longmapsto H_p$ soit un champ d'espaces horizontaux G-invariants. Alors tout $X_p \in T_pP$ est de la forme $X_p = \hat{A} + X_p^H$ avec $A \in \mathfrak{g}$ et $X_p^H \in H_p$. Posons $\omega_p(X_p) = A$. Alors $p \longmapsto \omega_p$ est une 1-forme sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}$ telle que $\omega(\hat{A}) = A$ pour tout $A \in \mathfrak{g}$. Pour montrer que $R_g^*(\omega) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\,\omega$ pour tout $g \in G$, il faut montrer que

$$\omega_{pg}\big((\mathrm{d}R_g)_p(X_p)\big) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big(\omega_p(X_p)\big)$$

pour tout $X_p \in T_pP$.
Si $X_p \in H_p$, d'un coté on a $\omega(X_p) = 0$ et de l'autre on a $(\mathrm{d}R_g)_p(X_p) \in H_{pg}$ donc $\omega_{pg}\big((\mathrm{d}R_g)_p(X_p)\big) = 0$.
Si $X_p = \hat{A} \in T_pP_x$, pour un $A \in \mathfrak{g}$, alors

$$\begin{aligned}
\omega_{pg}\big((\mathrm{d}R_g)_p(\hat{A}_p)\big) &= \omega_{pg}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(p\,\exp(tA)\,g\big)\right)\Big|_{t=0} = \omega_{pg}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(p\,g\,g^{-1}\,\exp(tA)\,g\big)\right)\Big|_{t=0} \\
&= \omega_{pg}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(p\,g\,\exp(t\mathrm{Ad}_{g^{-1}}A)\big)\right)\Big|_{t=0} = \omega_{pg}\Big(\big(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}A\big)\hat{}_{pg}\Big) \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}A = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big(\omega_p(\hat{A}_p)\big),
\end{aligned}$$

et donc la thèse. □

12.3 Proposition. *Si M est une varieté de Hausdorff et paracompacte, sur tout G-fibré principal P sur M il existe une connexion $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$.*

Preuve. Choquet-Bruhat p.257-258 : si M est paracompacte, mais preuve incomplète ?
Nomizu p. 41 : si P est paracompact et G est connexe : par réduction il suffit de considerer G compact. On a alors une métrique riemannienne sur P, on la modifie pour la rendre G-invariante en utilisant la mesure de Haar sur G (pour cela il faut G compact), et on l'utilise pour définir un champ d'espaces horizontaux G-invariants. □

12.2 Courbure

Soit P un G-fibré principal sur M, et ω une connexion principale sur P.

12.4 Definition. La **derivée covariante** induite par ω sur P est l'application linéaire $\nabla : \Omega^q(P;\mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^{q+1}(P;\mathfrak{g})$ définie par

$$\big(\nabla\alpha\big)(X_1,...,X_{q+1}) = (\mathrm{d}\alpha)(X_1^H,...,X_{q+1}^H), \qquad \alpha\in\Omega^q(p;\Gamma),$$

où X^H est la composante horizontale du champ X, par rapport à la connexion fixée ω.

En particulier, pour $q=0$, on trouve une définition de la connexion sur P comme derivée covariante :

$$\nabla : C^\infty(P,\mathfrak{g}) = \Gamma(P\times\mathfrak{g}) = \Gamma(TP) \longrightarrow \Omega^1(P;\mathfrak{g}) = \Omega^1(P)\otimes\Gamma(TP), \qquad f\longmapsto \nabla f(X) = \mathrm{d}f(X^H).$$

12.5 Definition. On appelle **courbure** de la connexion $\omega\in\Omega^1(p,\mathfrak{g})$ la 2-forme

$$\Omega := \nabla\omega \in \Omega^2(P;\mathfrak{g}),$$

i.e. $\Omega(X,Y) = \mathrm{d}\omega(X^H,Y^H)$ pour tout $X,Y\in\mathfrak{X}(P)$.

12.6 Proposition. *La courbure est une 2-forme G-équivariante, c'est-à-dire que pour tout $g\in G$ on a*

$$R_g^*(\Omega) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\Omega.$$

Preuve. Nomizu p.34. On utilise le Lemme suivant : Si $\hat{A}$ est un champ fondamental sur P et X est un champ horizontal sur P, alors $[X,\hat{A}]$ est horizontal. □

12.7 Proposition. *Toute connexion ω est liée à sa courbure Ω par l'équation de structure de E. Cartan :*

$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = -\frac{1}{2}\big[\omega(X),\omega(Y)\big] + \Omega(X,Y), \qquad X,Y\in\mathfrak{X}(P).$$

Par conséquence, la courbure satisfait l'identité de Bianchi :

$$\nabla\Omega = 0.$$

Si $\{e_\alpha\}$ est une base de $\mathfrak{g}$, et $c^\alpha_{\beta\gamma}$ sont les constantes de structure de $\mathfrak{g}$ dans cette base, l'équation de Cratan devient :

$$\mathrm{d}\omega^\alpha = -\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma} c^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\beta\wedge\omega^\gamma + \Omega^\alpha.$$

Preuve. Nomizu p.34. La courbure se calcule comme

$$\Omega(X,Y) = \nabla\omega(X,Y) = \mathrm{d}\omega(X,Y) + \frac{1}{2}\big[\omega(X),\omega(Y)\big], \qquad X,Y\in\mathfrak{X}(P).$$

FINIR □

12.3 Connexion induite sur les fibrés associés

Soit P un G-fibré principal sur M, F une varieté sur laquelle G agit à gauche et $N = P\times_G F$ le fibré associé à P de fibre F.

12.8 Proposition. *Toute connexion principale sur P induit une connexion de Ehresmann sur $N = P\times_G V$.*

Preuve. Soit ω une connexion principale sur P. On a alors un champ $p\mapsto H_p$ d'espaces horizontaux dans chaque espace tangent T_pP. Nous voulons définir une connexion de Ehresmann sur $N = P\times_G V$, c'est-à-dire un champ $y\mapsto H_y^N$ d'espaces horizontaux dans chaque espace tangent T_yN.

Pour tout $y\in N = P\times_G F$, y se represente comme un couple $(p,z)\in P\times F$ tel que $(pg,z) = (p,gz)$ ou également $(p,z) = (pg,g^{-1}z)$ pour tout $g\in G$.

Pour tout $y = (p,z)$, considerons l'application

$$\phi : P\longrightarrow N, \qquad \phi(p') = (p',z).$$

Alors pour tout $x\in M$, l'image de la fibre P_x dans P est la fibre N_x dans N, car

$$P_x \ni p' = pg \overset{\phi}{\longmapsto} (p',z) = (pg,z) = (p,gz)\in E_x.$$

Definissons alors l'espace horizontal H_y^N sur N comme l'image par ϕ de l'espace horizontal H_p sur P :

$$H_y^E := \mathrm{d}\phi_p(H_p).$$

Cette définition est bien posée, c'est-à-dire qu'elle est independante du choix des representants (p,z) de y, car si $y = (pg,g^{-1}z)$, la G-invariance de la connexion sur P, i.e. $H_{pg} = (\mathrm{d}R_g)_p(H_p)$, garantit que $\mathrm{d}\phi_{pg}(H_{pg}) = \mathrm{d}\phi_{pg}(\mathrm{d}R_g)_p(H_p) = \mathrm{d}\phi_p(H_p)$. On montre ensuite que le champ $y\longmapsto H_y^E$ ainsi défini est bien une connexion sur N, cf. Nomizu p.42. □

En particulier, toute connexion principale sur P induit donc une dérivée covariante ∇ sur le fibré vectoriel de fibre V associé à P.

Rappellons que l'ensemble des sections du fibré vectoriel $E = P \times_G V$ est isomorphe à l'ensemble des fonctions G-équivariantes sur P à valeurs dans V, c'est-à-dire

$$\Gamma(P \times_G V) \cong C^\infty_G(P, V).$$

FINIR LA DESCRIPTION DE $\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(E)$.

Références

[1] J. Baez, J. P. Muniain, *Gauge fields, knots and gravity*, World Scientific 1994

[2] Y. Choquet-Bruhat, *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*, Monographies Universitaires de Mathématiques, Dunod 1968

[3] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser 1992

[4] M. P. do Carmo, *Differential forms and applications*, Springer-Verlag 1994

[5] B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko, *Géométrie contemporaine*, Vol. I et Vol. II, Ed. MIR Moscou 1979

[6] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, Springer 1994

[7] K. Nomizu, *Lie groups and differential geometry*, The Mathematical Society of Japan 1956

[8] M. M. Postnikov, *Geometry VI – Riemannian Geometry*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer 2001

[9] C. Rovelli, *Quantum gravity*, Cambridge Monographs of Mathematical Physics, Cambridge University Press 2004

[10] B. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press 1980