

Table des matières

1	Action et équations d'Euler-Lagrange	3
1.1	Espace des configurations, espace des vitesses et espace des phases	3
1.2	Principe de moindre action et équation du mouvement	3
1.3	Lagrangien	3
1.4	Équation d'Euler-Lagrange	4
1.5	(*) Équations d'Hamilton-Jacobi	4
1.6	Exemples d'équations d'Euler-Lagrange	5
2	Variétés différentiables	7
2.1	(*) Rappels de topologie	7
2.2	Variétés différentiables	7
2.3	Exemples et exercices	8
2.4	Applications différentiables et difféomorphismes	9
2.5	Fonctions réelles sur une variété	9
2.6	Courbes paramétrées sur une variété	10
2.7	Espace tangent	11
2.8	Vecteurs tangents et dérivations	11
2.9	Différentielle d'une application	12
2.10	Immersion, plongement et sous-variétés	13
2.11	Submersions et fibrés	13
3	Fibrés vectoriels et espaces de sections	14
3.1	Fibrés vectoriels	14
3.2	Sections	15
3.3	Morphismes entre fibrés sur la même variété	16
3.4	Fonctions de transition et groupe structural	17
3.5	(*) Tenseurs de type (p, q)	17
3.6	Algèbre linéaire avec les fibrés vectoriels	18
4	Champs de vecteurs	20
4.1	Fibré tangent	20
4.2	Champs de vecteurs	20
4.3	Transport d'un champ par un difféomorphisme	21
4.4	Courbes intégrales et flots	22
4.5	(*) Dérivée de Lie des champs de vecteurs	22
5	Formes différentielles	23
5.1	Fibré cotangent	23
5.2	Formes différentielles	23
5.3	Transport d'une forme par une application	24
5.4	(*) Contraction de formes par un champ de vecteur	24
5.5	(*) Dérivée de Lie des formes différentielles	25
5.6	Différentielle extérieure ou de de Rham	25
5.7	Cohomologie de de Rham, Lemme de Poincaré	26
5.8	Formes différentielles à valeur dans un fibré	26
6	Variétés orientables et intégration	27
6.1	Variétés orientables	27
6.2	Partition de l'unité	27
6.3	Forme volume et orientation	27
6.4	Intégration des formes différentielles	28
6.5	Variétés à bord	29
6.6	Théorème de Stokes	29
7	Connexions sur fibrés vectoriels	30
7.1	Relevement horizontal sur un fibré	30
7.2	Connexion et transport parallèle sur un fibré vectoriel	33
7.3	Dérivée et différentielle covariante	35
7.4	Courbure d'une connexion	35
7.5	Identité de Bianchi en version covariante	37
8	Variétés (pseudo-) riemanniennes et connexion de Levi-Civita	39
8.1	Champs de tenseurs	39
8.2	(*) Espace vectoriel métrique	39
8.3	Variétés avec métrique	39
8.4	Isométries	40
8.5	Longueur des courbes, forme volume	40
8.6	Opérateur de Hodge	41
8.7	Dualité de Poincaré	41
8.8	Connexion de Levi-Civita	41
8.9	Torsion	41
8.10	Courbure	41

9	Groupes et algèbres de Lie	42
9.1	Groupes de Lie	42
9.2	Sous-groupes et espaces homogènes	42
9.3	Champs de vecteurs invariants et algèbre de Lie	42
9.4	Application exponentielle	42
9.5	Actions adjointes	43
9.6	Formes différentielles invariantes	43
9.7	Métrique invariante	43
10	Action d'un groupe de Lie sur une variété	45
10.1	Action d'un groupe de Lie sur une variété	45
10.2	Espace des orbites	45
10.3	Orbites des actions libres	45
10.4	Applications G -équivariantes	46
10.5	Champs de vecteurs et formes G -équivariantes	46
11	Fibrés principaux et connexions	47
11.1	Fibré principal de groupe G	47
11.2	Exemples	47
11.3	Fonctions de transition	48
11.4	Espaces de sections	48
11.5	Groupe de jauge	48
11.6	Réduction du groupe structural	49
11.7	Connexions sur un fibré principal	49
11.8	Courbure	49
12	Fibrés associés à un fibré principal et connexions	50
12.1	Fibré associé à un fibré principal	50
12.2	Exemples	50
12.3	Espaces de sections	50
12.4	Groupe de jauge	50
12.5	Connexions	50
12.6	Courbure	50
	Références	51

Attention : programme non définitif, mis à jour le 21 octobre 2010. Les chapitres 8, 11 et 12 ne sont pas complets.

Planning : le cours est dispensé sur 12 semaines, prévoir de 4 à 6 pages par semaine.