

CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 1 – 1er mars 2012

Règlement – L'épreuve dure 30 minutes. Il est interdit d'utiliser des calculatrices. Notes personnelles et documents sont autorisés. Les téléphones portables doivent être éteints.

Entre crochets [] est indiqué le barème sur 20 points.

Exercice – La *cardioïde* est la courbe plane donnée par la paramétrisation $\gamma : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = ((1 - \cos t) \cos t, (1 - \cos t) \sin t), \quad t \in [0, 2\pi[.$$

1. [1 pt] – La paramétrisation γ est-elle de classe C^∞ ? Pourquoi?
2. [2 pt] – L'application $t \mapsto u(t) = \cos t$ est-elle une reparamétrisation de γ ? Pourquoi?
3. [2 pts] – Trouver le rayon du plus petit disque centré en $(0, 0)$ contenant la cardioïde. En quelles valeurs de t le rayon $\|\gamma(t)\|$ est-il minimale et maximale?
4. [2 pts] – Trouver les points singuliers de γ .
5. [3 pts] – En utilisant un développement limité à l'ordre 3, démontrer qu'autour du point $t = 0$ le support de la cardioïde est décrit par l'équation cartésienne $2x^3 = y^2$.
En déduire le dessin de la cardioïde sur un plan cartésien autour du point $t = 0$.
6. [3 pts] – En utilisant un développement limité à l'ordre 2, démontrer qu'autour du point $t = \pi$ le support de la cardioïde est décrit par l'équation cartésienne $x = -2 + \frac{3}{8}y^2$.
En déduire le dessin de la cardioïde sur un plan cartésien autour du point $t = \pi$.
7. [2 pts] – Calculer $x(t)^2 + y(t)^2 + x(t)$ et en déduire une équation cartésienne décrivant la cardioïde.
8. [2 pts] – Soit $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto A(x, y) = (x, -y)$ la symétrie axiale d'axe $\vec{x}$.
Montrer que la cardioïde est symétrique par rapport à l'axe $\vec{x}$, c'est-à-dire que pour tout $t \in [0, 2\pi[$ il existe un $t' \in [0, 2\pi[$ tel que $A(\gamma(t)) = \gamma(t')$.
9. [3 pts] – Calculer la valeur de $\gamma(t)$ en $t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ et dessiner la cardioïde sur un plan cartésien.