CONTRÔLE FINAL – 5 juin 2014

Réglement – L'épreuve dure 2 heures. Il est interdit d'utiliser des calculatrices. Notes personnelles et documents sont autorisés. Les téléphones portables doivent être éteints.

Entre parenthèse est indiqué le barême.

Exercice 1 [7 pts = 1+1+2+3]

Soit γ la courbe plane paramétrée en coordonnées polaires par $\rho(t) = \dfrac{t}{\pi}$, pour $t \in [0, 2\pi]$ (arc de **spirale d'Archimède**).

a) Dessiner $\rho(t)$ et $\gamma(t) = \rho(t)\, e^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

b) Trouver les points réguliers de γ.

c) Calculer la longueur de γ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, en sachant que $\operatorname{argsh} a = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$.

d) En utilisant le théorème de Green-Riemann, calculer l'aire du domaine D du plan entouré par γ restreinte à l'interval $[0, \pi]$ et par le segment $[-1, 0]$ de l'axe Ox.

Exercice 2 [9 pts = 1+1+1+2+1+3]

Soit S la surface de révolution de méridien $\alpha(t) = \left(t + 1, 0, \dfrac{2t}{t+1}\right)$, avec $t \in [0, 1]$, et axe Oz.

a) Trouver une équation cartésienne décrivant α, montrer que α est une branche d'hyperbole et la dessiner dans le plan xOz.

b) Donner un paramétrage $f(t, \varphi)$ de S et dessiner la surface.

c) Calculer le vecteur normal (non unitaire) à la surface et déterminer les points réguliers de S.

d) Calculer l'aire de la surface S, en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{4 + (t+1)^4}$.

e) Trouver une équation cartésienne de S qui exprime $x^2 + y^2$ en fonction de z, pour tout $(x, y, z) \in S$.

f) En utilisant e), décrire en coordonnées cartesiennes le solide $D \subset \mathbb{R}^3$ entouré par la surface S et par les deux disques horizontaux à hauteur $z = 0$ et $z = 1$. Ensuite calculer le volume de D.

Exercice 3 [4 pts = 2+2]

Pour les deux formes différentielles ω suivantes, trouver le domaine, déterminer si elles sont fermées et exactes, et dans ce cas trouver une primitive.

a) $\omega(x, y) = -\dfrac{2y}{(x-y)^2}\, dx + \dfrac{2x}{(x-y)^2}\, dy$

b) $\omega(x, y) = \left(xy^2 - \dfrac{y}{x^2}\right)\, dx \wedge dy$