

DEVOIR MAISON 3

24 avril – 20 mai 2014

Règlement – Le devoir est à rendre au plus tard le mardi 20 mai 2014.

Exercice 1 – Pour les 1-formes différentielles suivantes, trouver le domaine de définition, déterminer si elles sont fermées et exactes, et dans ce cas calculer leur primitive.

a) $\omega(x, y) = \frac{y^2 - 1}{(xy - 1)^2} dx + \frac{1 - x^2}{(xy - 1)^2} dy.$

b) $\eta(x, y) = (3x^2 - 2y^2) dx + 6xy dy.$

Exercice 2 – Pour les 2-formes différentielles suivantes, trouver le domaine de définition, déterminer si elles sont exactes, et dans ce cas calculer au moins trois différentes primitives : une contenant seulement un terme en dx , une contenant seulement un terme en dy et une avec termes mixtes.

a) $\omega(x, y) = (y^2 - 3x^2) dx \wedge dy.$

b) $\eta(x, y) = \left(y + \frac{x^2}{y^2}\right) dx \wedge dy.$

Exercice 3 – Calculer l'aire du domaine D de $\mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation $x + y^2 = 1$ et $y = -\sqrt{2}x$.

Exercice 4 – Soit D le disque d'équation cartésienne $x^2 + y^2 \leq 1$. En utilisant le théorème de Green-Riemann, calculer les intégrales doubles suivants :

a) $\iint_D xy^2 dx dy;$

b) $\iint_D x^2 y^2 dx dy,$ en sachant que $\int (\cos t)^{2n} dt = \frac{1}{2n} \sin t (\cos t)^{2n-1} + \frac{2n-1}{2n} \int (\cos t)^{2n-2} dt.$

Exercice 5 –

a) Calculer l'aire du tronc de cône C d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ délimité par les valeurs $0 \leq z \leq 3$.

b) En utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradski, calculer le volume du solide délimité par le tronc de cône C et par le disque d'équation $x^2 + y^2 \leq 9$ à hauteur $z = 3$.