

FICHE TD 3 - SURFACES

Exercice 1 Soit S la surface paramétrée par $f(u, v) = (u^2, v^3, u)$, pour $u, v \in \mathbb{R}$.

1. Décrire S en coordonnées cartésiennes et la dessiner.
2. Trouver les points réguliers de S .
3. Trouver une paramétrisation régulière $\gamma(t)$ de la courbe obtenue comme intersection de la surface S avec le plan d'équation $x + y = z$.
[Facultatif:] Calculer sa courbure et sa torsion en tout point.
4. En tout point régulier, déterminer la normale à S et le plan tangent à S .

SURFACES DE RÉVOLUTION

Soit π un plan, Γ une courbe de π , et ℓ une droite de π . On appelle **surface de révolution d'axe ℓ et de méridien Γ** la surface engendrée par la rotation de Γ autour de ℓ . La courbe décrite par la rotation de chaque point de Γ s'appelle **parallèle**.

Exercice 2 Soit S la surface de révolution d'axe $\ell = \vec{Oz}$ et méridien $\Gamma = \{\alpha(t) = (r(t), 0, h(t)), t \in I\}$ contenu dans le plan $\{y = 0\}$.

1. Paramétrer la surface de révolution S , les méridiens et les parallèles.
2. Donner les conditions pour que S soit régulière.
3. Montrer que toute droite normale à la surface de révolution coupe l'axe ℓ ou est parallèle à ℓ .
4. Montrer que le vecteur normal à la surface coïncide avec le vecteur normal algébrique du méridien.

Exercice 3 Les surfaces suivantes sont des surfaces de révolution. Trouver la paramétrisation des méridiens et des parallèles, et dessiner la surface. Trouver les points réguliers et le vecteur normal unitaire.

- a) Le **cylindre** d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = r^2$, avec $r > 0$.
- b) Le **cône** d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = z^2$.
- c) L'**ellipsoïde** d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, avec $a, b, c > 0$, et la **sphère** $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.
- d) L'**hyperboloïde à une nappe** d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
- e) L'**hyperboloïde à deux nappes** d'équation cartésienne $x^2 - y^2 - z^2 = 1$.
- f) Le **tore**, surface définie par la révolution d'un cercle autour d'un axe qui n'intersecte pas le cercle.
- g) Le **caténoïde**, qui est la surface de révolution d'axe $\vec{Oz}$ et méridien $\gamma(t) = (\cosh t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

SURFACES RÉGLÉES

Soit $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée, où $U \subset \mathbb{R}$, et soit $\{\Delta_u\}_{u \in U}$ une famille à un paramètre de droites. On appelle **surface réglée de directrice α et de génératrices Δ_u** la surface engendrée par le mouvement des droites Δ_u le long de la courbe α . Un vecteur $\beta(u)$ non nul qui donne la direction de Δ_u s'appelle **vecteur générateur**.

Si la courbe directrice est une droite ℓ , et les vecteurs générateurs appartiennent tous à un même plan π secant ℓ , la surface réglée s'appelle **conoïde d'axe ℓ et plan directeur π** .

Si ℓ est orthogonal à π , on a un **conoïde droit**. Un tel conoïde est défini par le vissage d'une droite orthogonale à l'axe de vissage.

Exercice 4 Soit $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée, $\beta : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une famille de vecteurs non nuls et S la surface réglée de directrice α et vecteurs générateurs $\beta(u)$, $u \in U$.

1. Paramétrer les droites génératrices Δ_u et la surface réglée S .
2. Donner les conditions pour que S soit régulière.

Exercice 5 Les surfaces suivantes sont des surfaces réglées. Trouver la paramétrisation de la directrice, des vecteurs générateurs et des droites génératrices. Dessiner la surface. La surface est-elle un conoïde? Trouver les points réguliers.

- a) L'**hélicoïde**, ou **escalier en colimaçon**, surface paramétrée par $f(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$, avec $u, v \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$.
- b) Le **parapluie de Whitney**, surface paramétrée par $f(u, v) = (uv, v, u^2)$, avec $u, v \in \mathbb{R}$. Comparer avec la surface d'équation cartésienne $x^2 = y^2 z$.
- c) La **bande de Möbius**, qui est la surface réglée de directrice

$$\alpha(u) = (\cos u, \sin u, 0), \quad u \in \mathbb{R}$$

et vecteur générateur

$$\beta(u) = \left(\cos \frac{u}{2} \cos u, \cos \frac{u}{2} \sin u, \sin \frac{u}{2} \right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Déterminer la normale à la bande de Möbius aux points $v = 0$. Peut-on choisir un vecteur normal continu comme fonction du point $P \in M$?

- d) L'**hyperboloïde à une nappe**, surface définie par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
[*Hint*: vérifier d'abord qu'en prenant pour directrice la courbe $\alpha : \varphi \in [0, 2\pi[\mapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \in \mathbb{R}^3$, et pour vecteurs générateurs $\beta(\varphi) = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 1)$, on obtient bien cette surface. Pour trouver ces paramétrages, on peut déterminer l'intersection de l'hyperboloïde avec le plan $x = 1$ et en déduire deux familles de droites qui remplissent l'hyperboloïde par rotation autour de l'axe vertical.]
- e) Le **paraboloïde hyperbolique** d'équation cartésienne $z = xy$.
[*Hint*: vérifier d'abord qu'en prenant pour directrice la courbe $\alpha : u \in \mathbb{R} \mapsto (u, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, et pour vecteurs générateurs $\beta(u) = (0, 1, u)$, on obtient bien cette surface. Pour trouver ces paramétrages, on peut déterminer l'intersection du paraboloïde avec les plans $x = u$, $u \in \mathbb{R}$.]
- f) Le **conoïde de Plücker**, qui est la surface d'équation cartésienne $z = xy/(x^2 + y^2)$. Comparer avec la surface d'équation cartésienne $z(x^2 + y^2) = xy$.
[*Hint*: vérifier d'abord qu'en prenant pour directrice la courbe $\alpha : u \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \mapsto (0, 0, u) \in \mathbb{R}^3$, et pour vecteurs générateurs $\beta_+(u) = (1 + \sqrt{1 - 4u^2}, 2u, 0)$ et $\beta_-(u) = (1 - \sqrt{1 - 4u^2}, 2u, 0)$, on obtient bien cette surface. Pour trouver ces paramétrages, on peut déterminer l'intersection du conoïde avec les plans $z = u$ et en déduire deux familles de droites qui remplissent le conoïde.]