M1 Geometrie – TD1 Courbes paramétrées

2025

Exo1 • $\mathbb{R}^n$ esp. vect. avec vecteurs $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, produit scalaire $\langle v, u\rangle = \sum_{i=1}^n v_i u_i$

et norme $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$

• $\mathbb{R}^n$ esp. de points $x = (x_1, \dots, x_n)$ avec distance $d(x,y) = \|x-y\|$.

Caractériser les isométries de $(\mathbb{R}^n, d)$.

__Def__: __Isométrie__ = bijection $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui préserve la distance : $d(F(x), F(y)) = d(x,y)$.

$\iff$ F préserve le produit scalaire (longueur et angles) : $\langle F(x), F(y)\rangle = \langle x, y\rangle$,

où point $x \equiv$ vecteur $v = x - 0$.

__Preuve__: $\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle \Rightarrow \boxed{\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)}$

"$\Rightarrow$" $\langle F(x), F(y)\rangle = \frac{1}{2}\left(\|F(x)\|^2 + \|F(y)\|^2 - \underbrace{\|F(x)-F(y)\|^2}\right)$

$= d(F(x), F(y)) = d(x,y) = \|x-y\|^2$

$= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \langle x, y\rangle$.

"$\Leftarrow$" $d(F(x), F(y))^2 = \|F(x) - F(y)\|^2 = \langle F(x) - F(y), F(x) - F(y)\rangle$

$= \langle F(x), F(x)\rangle + \langle F(y), F(y)\rangle - 2\langle F(x), F(y)\rangle$

$= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - 2\langle x, y\rangle = \|x-y\|^2 = d(x,y)^2$.

__Thm__: Isométrie $(\mathbb{R}^n, d) = \{ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax + b \mid A \in O(n) = \{A \in Gl_n(A) \mid A^{-1} = A^t\}, b \in \mathbb{R}^n \}$

$\cong \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ produit semi-direct : $(b', A') \circ (b, A) = (b' + A'b, A'A)$.

__Preuve__: • Si $F(x) = Ax + b$ avec $A \in O(n)$ et $b \in \mathbb{R}^n$, alors F est une isométrie :

– F bijective, car $y = Ax + b \Rightarrow \exists F^{-1}(y) = x = A^{-1}(y - b)$

– F préserve d, car $d(F(x), F(y))^2 = \|F(x) - F(y)\|^2 = \|Ax + \cancel{b} - Ay - \cancel{b}\|^2 = \|A(x-y)\|^2$

$= \langle A(x-y), A(x-y)\rangle = \langle \underbrace{A^t A}_{\mathbb{1}} (x-y), x-y\rangle = d(x,y)$.

• Viceversa, si F est une isométrie, posons $b := F(0) \in \mathbb{R}^n$ et $G(x) = F(x) - b$.

Alors G est isométrie, car $d(G(x), G(y)) = \|G(x) - G(y)\| = \|F(x) - b - F(y) + b\| = d(F(x), F(y)) = d(x,y)$,

et $G(0) = 0$, i.e. G fixe l'origine. Montrons que G est linéaire :

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et posons $e_i' := G(e_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Puisque $\langle e_i', e_j'\rangle = \langle G(e_i), G(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, $(e_1', \dots, e_n')$ est aussi base O.N.

et on peut écrire $G(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) e_i'$, avec $a_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ déf $a_i(x) = \langle G(x), e_i'\rangle$.

Or, les fcts a_i sont linéaires :

$a_i(x + \lambda y) = \langle G(x + \lambda y), e_i'\rangle = \langle G(x+\lambda y), G(e_i)\rangle = \langle x + \lambda y, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle + \lambda\langle y, e_i\rangle$

$= \langle G(x), e_i'\rangle + \lambda\langle G(y), e_i'\rangle = a_i(x) + \lambda a_i(y)$.

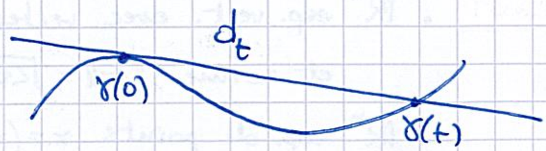
Donc G est linéaire : $G(x) = Ax$ avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^t A x, y\rangle \overset{!}{=} \langle x, y\rangle$ ie $A^t A = \mathbb{1}$, d'où $A \in O(n)$.

Au final : $F(x) = G(x) + b = Ax + b$. ∎

Exo 2

a) γ régulière, C^1, plane. Quelle est la limite des droites passant par $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$ pour $t \to 0$?



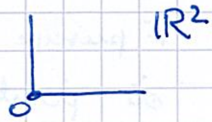
- Droite d_t paramétrée par $u \in \mathbb{R}$:

$$d_t(u) = \gamma(0) + u \cdot \left(\frac{\gamma(t)-\gamma(0)}{t-0} \right)$$

$$\underset{t\to 0}{\sim} \gamma(0) + u \cdot \left(\frac{\cancel{\gamma(0)} + t\gamma'(0) + O(t^2) - \cancel{\gamma(0)}}{t} \right) = \gamma(0) + u\left(\gamma'(0) + O(t)\right)$$

- Limite pour $t \to 0$ = droite tangente $d(u) = \gamma(0) + u\gamma'(0)$.

b) Angle droit $\Gamma = \{(x,0) \mid x \geq 0\} \cup \{(0,y) \mid y \geq 0\}$



- Est-il le support d'une courbe paramétrée ? OUI
- Trouver une paramétrisation continue : $\gamma(t) = \begin{cases} (t,0), & t \geq 0 \\ (0,-t), & t < 0 \end{cases}$

- Trouver une param. C^∞, en utilisant la fonction $f(t) = e^{-1/t^2}$

t.q. $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t \to 0} e^{-1/t^2} = e^{-1/0^+} = e^{-\infty} = 0$.

Rem: f est C^∞ : $t \neq 0 \Rightarrow f'(t) = \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2}$ est bien déf et en $t=0$:

$$\lim_{t\to 0} f'(t) = \frac{0}{0} \text{ indét } \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{t \to 0} 2 \cdot \frac{\frac{2}{t^3} e^{-1/t^2}}{3t^2} \quad \text{no, ça empire}$$

$$\lim_{t\to 0} f'(t) = \lim_{t\to 0} 2 \frac{1/t^3}{e^{1/t^2}} = \left(\frac{\pm\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0} \cancel{2} \cdot \frac{-3/t^4}{e^{1/t^2} \cdot \frac{-\cancel{2}}{t^3}} = \lim_{t\to 0} 3 \cdot \frac{1/t}{e^{1/t^2}}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0} 3 \cdot \frac{-1/t^2}{e^{1/t^2} \cdot \frac{-2}{t^3}} = \lim_{t \to 0} \frac{3}{2} \underbrace{t}_{\to 0} \underbrace{e^{-1/t^2}}_{\to 0} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$$

De même pour les dérivées supérieures.

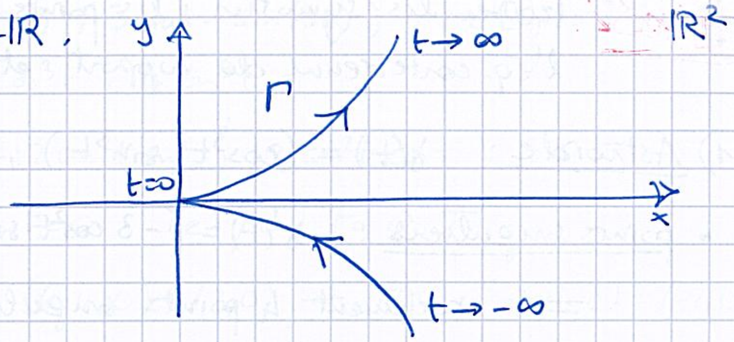
Posons $\gamma(t) = \begin{cases} (tf(t), 0) & \text{si } t > 0 \\ (0,0) & \text{si } t = 0 \\ (0, -tf(t)) & \text{si } t < 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma'(t) = \begin{cases} (f(t) + tf'(t), 0) & \text{si } t > 0 \\ (0,0) & \text{si } t = 0 \\ (0, -f(t) - tf'(t)) & \text{si } t < 0 \end{cases}$

etc pour $\gamma''(t), \ldots$ donc γ est C^∞ et $\text{supp}(\gamma) = \Gamma$.

- Ce paramétrage est-il régulier en $(0,0)$? NON, car $\gamma'(0) = (0,0)$.
- Peut-on avoir un paramétrage régulier en $(0,0)$?

NON, car si un param. γ est rég. en $(0,0) = \gamma(0)$, alors le vecteur $\gamma'(0)$ détermine la droite tangente à γ en $\gamma(0)$, mais le support de γ n'admet pas de droite tangente en $(0,0)$!

c) <u>Courbe cuspidale</u> $\gamma(t) = (t^2, t^3)$; $t\in\mathbb{R}$.



• Dessiner la courbe : $\gamma(0)=(0,0)$

$$\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3\end{cases} \Rightarrow y = \pm x^{3/2}$$

• Est-elle régulière en $(0,0)$?

$\gamma'(0) = (2t, 3t^2) \Rightarrow \gamma'(0)=(0,0)$ NON rég en $(0,0)=\gamma(0)$.

• $\Gamma = \{\gamma(t) = (t^2,t^3) \mid t\geq 0\}$

Trouver un paramétrage C^1 de Γ qui soit régulier en $(0,0)$.

$t\geq 0 \Rightarrow y = x^{3/2} \Rightarrow \gamma(x) = (x, x^{3/2})$, $x\geq 0$ est C^1

$\gamma'(x) = (1, \frac{3}{2}\sqrt{x}) \Rightarrow \gamma'(0) = (1,0)\neq\vec{0}$ donc γ rég. en $(0,0)$.

• M.q. il n'y a pas de param. C^2 de Γ qui soit régulier en $(0,0)$.

D'abord, notons que $\gamma(x) = (x,x^{3/2})$ est C^1 et régulier en $(0,0)$, mais

$\gamma''(x) = (0, \frac{3}{4\sqrt{x}})$ n'est pas dif en $x=0$, donc pas C^2.

Par l'absurde : supposons $\exists\, \gamma(t) = (x(t), y(t))$ t.q. :

1) $x(t)^3 = y(t)^2$
2) $x(t), y(t) \geq 0\ \forall t\geq 0$ et $x(0)=y(0)=0$
3) $\exists\, x'(t), y'(t)$ continues et $(x'(0), y'(0)) \neq (0,0)$
4) $\exists\, x''(t), y''(t)$ continues en $t=0$ aussi.

Alors : $y(t) \overset{1)}{=} x(t)^{3/2}$

$$y'(t) = \frac{3}{2}\sqrt{x(t)}\ x'(t)$$

$$x(0) \overset{2)}{=} 0 \Rightarrow y'(0)=0 \overset{3)}{\Longrightarrow} x'(0)\neq 0$$

$$y''(t) = \frac{3\,x'(t)^2}{4\sqrt{x(t)}} + \frac{3}{2}\sqrt{x(t)}\ x''(t)$$

donc $y''(0) = \frac{3}{4}\,\frac{\overbrace{x'(0)^2}^{\neq 0}}{\underbrace{\sqrt{x(0)}}_{=0}} + \frac{3}{2}\underbrace{\sqrt{x(0)}}_{=0}\, x''(0) = \frac{\text{nombre}}{0}$ n'est pas dif. $\boxtimes$

d) Trouver un paramétrage de $\gamma(t) = (t^3, t^4+t^5)$, $t\in\mathbb{R}$, qui soit régulier en $t=0$.

• D'abord : $\gamma'(t) = (3t^2, 4t^3+5t^4) \Rightarrow \gamma'(0)=(0,0)$: ce param. n'est pas rég. en $t=0$.

• Posons $x=t^3$ comme nouveau paramètre : $t = x^{1/3} \Rightarrow y(x) = x^{4/3}+x^{5/3}$

$y'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{5}{3}x^{2/3}$ est bien déf $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc $\alpha(x) = (x, x^{4/3}+x^{5/3})$ est un param. C^1 avec $\alpha'(0) = (1,0)\neq(0,0)$, donc α est régulier en $x=0$.

• <u>Rem</u> : $y''(x)$ n'est pas dif en $x=0$, donc α n'est pas C^2.

Exo3 Trouver les symétries, les points singuliers (avec D.L.), l'éq. cartésienne du support et faire le dessin.

1) Astroïde : $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

- points singuliers : $\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$ s'annulle en $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow$ exactement 4 points singuliers, les autres sont rég.

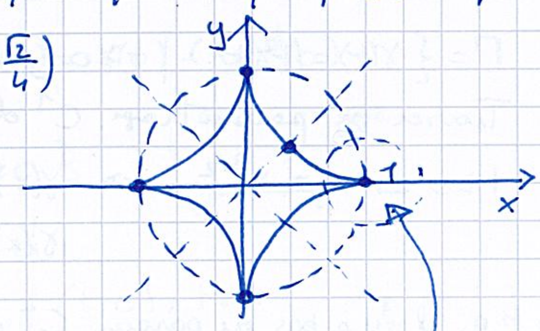
- dessin : γ contenue dans le disque unitaire, car $|\cos^3 t| = |\cos t|^3 \leq |\cos t| \leq 1$.

$\gamma(0) = (1,0)$ $\quad \gamma(\frac{\pi}{4}) = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$\gamma(\pi/2) = (0,1)$

$\gamma(\pi) = (-1,0)$

$\gamma(3\pi/2) = (0,-1)$



D.L. à $t=0$:

$$\gamma(t) = \left(\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right)^3, \left(t + o(t^2)\right)^3\right) = \left(1 - \frac{3}{2}t^2 + o(t^3), t^3 + o(t^4)\right).$$

$\underset{t \to 0}{\sim} \left(1 - \frac{3}{2}t^2, t^3\right)$ courbe cuspidale

- symétries :

Def : γ est symétrique, de symétrie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ou γ est invariante par T, si $T(\mathrm{supp}(\gamma)) \subseteq \mathrm{supp}(\gamma)$.

$\Leftrightarrow \forall t \ \exists \tilde{t}$ t.q. $T\gamma(t) = \gamma(\tilde{t})$.

Ici il y a beaucoup de symétries, par rapport à :

- rotations d'angle $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$
- réflexions par rapport à 4 axes : |, —, /, \

Montrons que γ est symétrique p.r. à la rotations $R_\pi = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$R_\pi \gamma(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} = \gamma(t+\pi).$$

$$R_{\pi/2} \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^3 t \\ \cos^3 t \end{pmatrix} = \gamma(t + \pi/2).$$

- éq. cartésienne du support :

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \cos^6 t = (\cos^2 t)^3 = (1-\sin^2 t)^3 = 1 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t - \sin^6 t \\ y^2 = \sin^6 t \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 3\sin^2 t(\sin^2 t - 1) = -3\sin^2 t \cos^2 t$

$\Rightarrow (x^2+y^2-1)^3 = -27\sin^6 t \cos^6 t = -27x^2y^2$

$\Rightarrow (x^2+y^2-1)^3 + 27x^2y^2 = 0$.

2) Nephroïde : $\gamma(t) = (3\cos t - \cos(3t),\ 3\sin t - \sin(3t))$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$= (6\cos t - 4\cos^3 t,\ 4\sin^3 t)$

- points singuliers : $\gamma'(t) = (-6\sin t + 12\cos^2 t \sin t,\ 12\sin^2 t \cos t)$

$= 0$ ssi $\sin t = 0$, i.e. pour $t = 0, \pi$.

On a 2 points singuliers : $\gamma(0) = (6-4, 0) = (2,0)$ et $\gamma(\pi) = (-6+4, 0) = (-2, 0)$

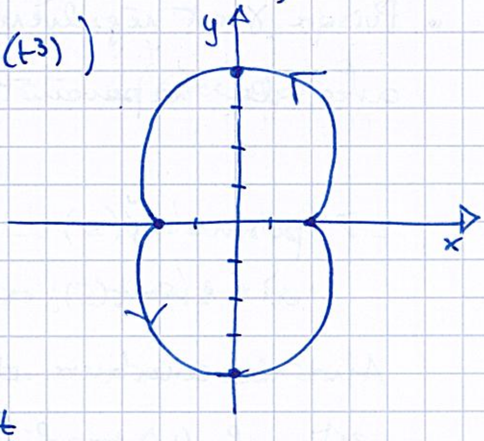
- D.L. en $t=0$: $\gamma(t) = \left(6\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right) - 4\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right)^3,\ 4\left(t + o(t^3)\right)^3\right)$

$= (6 - 3t^2 - 4 + 6t^2 + o(t^3),\ 4t^3 + o(t^3))$

$\sim (2 + 3t^2, 4t^3)$ cusp !

- Dessin : $\gamma(0) = (2,0)$ $\quad \gamma(\pi/2) = (0,4)$

$\gamma(\pi) = (-2,0)$ $\quad \gamma(3\pi/2) = (0,-4)$



- Éq. cartésienne :

$$\begin{cases} x = 6\cos t - 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 36\cos^2 t - 48\cos^4 t + 16\cos^6 t \\ y^2 = 16\sin^6 t = 16(1-\cos^2 t)^3 = 16(1 - 3\cos^2 t + 3\cos^4 t - \cos^6 t) \\ \quad = 16 - 48\cos^2 t + 48\cos^4 t - 16\cos^6 t \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 16 - 12\cos^2 t = 4 + 12(1 - \cos^2 t) = 4 + 12\sin^2 t$

$\Rightarrow (x^2 + y^2 - 4)^3 = (12\sin^2 t)^3 = 27 \times 4 \times (4\sin^3 t)^2 = 108\, y^2$

$\Rightarrow (x^2 + y^2 - 4)^3 - 108\, y^2 = 0$.

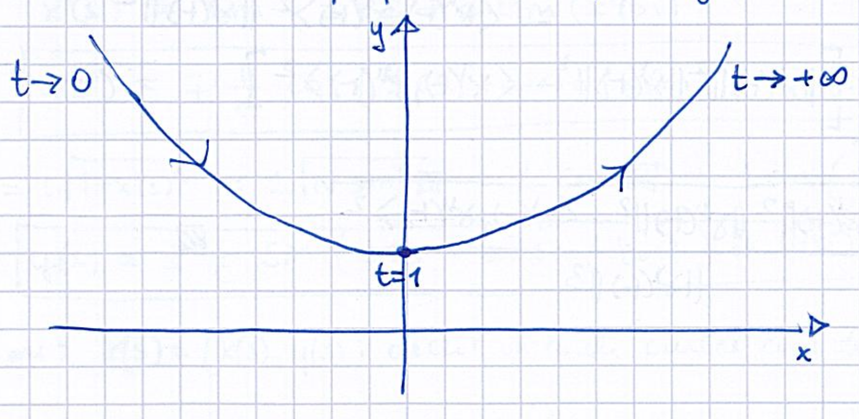
3) Chaînette : $\gamma(t) = \left(\ln t,\ t + \frac{1}{t}\right)$, $t > 0$

- points singuliers : $\gamma'(t) = \left(\frac{1}{t},\ 1 - \frac{1}{t^2}\right) = \left(\frac{1}{t},\ \frac{t^2-1}{t^2}\right) \neq (0,0)$ $\forall t > 0$.

$\Rightarrow$ Tous les points sont réguliers.

- éq. cartésienne : $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = e^x \\ y = e^x + e^{-x} = 2\,\mathrm{ch}(x) \end{cases}$

La chaînette est donc le graphe de la fct $y = 2\,\mathrm{ch}(x)$:



Exo 7. $\gamma : I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ courbe param. régulière.

M.q. la courbure de γ est

$$k(t) = \frac{\sqrt{\|\gamma'(t)\|^2 \|\gamma''(t)\|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t)\rangle^2}}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{|x'(t)\, y''(t) - y'(t)\, x''(t)|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

Et si $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ on a aussi $k(t) = \dfrac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$.

- Puisque γ est régulière, on peut la reparamétrer par longueur d'arc avec la reparamétrisation $t \mapsto s := s(t) = s_0 \pm \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\|\, du$

avec choix $\Rightarrow$ supp. $s_0 = 0$ et $+$

$\Rightarrow$ posons $\tilde\gamma(s) := \gamma(t(s))$ la param. par longueur d'arc, où $s \mapsto t(s)$ est la fct réciproque de $t \mapsto s(t)$.

Alors la courbure de la courbe (qui est invariante par reparam.) est $k_\gamma(t) = k_{\tilde\gamma}(s) = \|\tilde\gamma''(s)\|$.

- $\tilde\gamma'(s) = \gamma'(t)\big|_{t=t(s)} \cdot t'(s)$ où $t'(s) = \dfrac{1}{s'(t)}\Big|_{t=t(s)} = \dfrac{1}{\|\gamma'(t)\|}\Big|_{t=t(s)}$

$$= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\Big|_{t=t(s)}$$

- $$\tilde\gamma''(s) = \frac{\gamma''(t) \cdot \cancel{t'(s)\, \|\gamma'(t)\|} - \gamma'(t) \frac{d}{ds}\|\gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^2}$$

or $$\frac{d}{ds}\|\gamma'(t(s))\| = \frac{d}{ds}\sqrt{\langle \gamma'(t(s)), \gamma'(t(s))\rangle} = \frac{\cancel{2}\langle \gamma''(t)\cdot t'(s), \gamma'(t)\rangle}{\cancel{2}\|\gamma'(t)\|} = \frac{\langle \gamma''(t), \gamma'(t)\rangle}{\|\gamma'(t)\|^2}$$

$$\Rightarrow \tilde\gamma''(s) = \frac{\gamma''(t)\, \|\gamma'(t)\|^2 - \gamma'(t)\, \langle \gamma''(t), \gamma'(t)\rangle}{\|\gamma'(t)\|^4}$$

- $$k_\gamma(t)^2 = \|\tilde\gamma''(s)\|^2 = \langle \tilde\gamma''(s), \tilde\gamma''(s)\rangle$$

$$= \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^8}\Big[\|\gamma''(t)\|^2 \|\gamma'(t)\|^4 \underbrace{- 2\langle \gamma''(t), \gamma'(t)\rangle^2 \|\gamma'(t)\|^2 + \|\gamma'(t)\|^2 \langle \gamma''(t), \gamma'(t)\rangle^2}_{- \langle \gamma''(t), \gamma'(t)\rangle^2 \|\gamma'(t)\|^2}\Big]$$

$$= \frac{\cancel{\|\gamma'(t)\|^2}}{\|\gamma'(t)\|^{\cancel{8}\,6}}\Big[\|\gamma''(t)\|^2 \|\gamma'(t)\|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t)\rangle^2\Big]$$

$$\Rightarrow k_\gamma(t) = \frac{\sqrt{\|\gamma'(t)\|^2 \|\gamma''(t)\|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t)\rangle^2}}{\|\gamma'(t)\|^3} \quad \blacksquare$$

Exo 8 Quelles sont les courbes planes régulières à courbure constante ?

- Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe rég ($\gamma'(t) \neq (0,0)\ \forall t$), que l'on peut supposer paramétrée par longueur d'arc s ($\|\gamma'(s)\| = 1\ \forall s$).
La courbure de γ est alors $k(s) = \|\gamma''(s)\|$.

- Supposons $\gamma(s) = (x(s), y(s))$. Alors :

① $\|\gamma'(s)\| = 1 \iff x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$

② $k(s) = c$ constant $\iff x''(s)^2 + y''(s)^2 = c^2$ (avec $c \geq 0$).

- Si $c = 0$, on a :

$$② \iff \begin{cases} x''(s) = 0 \\ y''(s) = 0 \end{cases} \forall s \iff \begin{cases} x(s) = as + b \\ y(s) = a's + b' \end{cases} \iff \begin{cases} a'x = aa's + ba' \\ ay = aa's + ab' \end{cases}$$

$\iff a'x - ay = ba' - ab'$: éq. cartésienne d'une droite,

car ① $\Rightarrow a^2 + a'^2 = 1$ donc soit $a \neq 0$ soit $a' \neq 0$.

- Si $c \neq 0$, on a :

$$① \Rightarrow y' = \pm\sqrt{1 - x'^2} \Rightarrow y'' = \pm \frac{-2x'x''}{2\sqrt{1-x'^2}} = \mp \frac{x'x''}{\sqrt{1-x'^2}}$$

$$\Rightarrow y''^2 = \frac{x'^2 x''^2}{1 - x'^2}$$

$$② \quad x''^2 + y''^2 = x''^2 + \frac{x'^2x''^2}{1-x'^2} = \frac{x''^2 - \cancel{x'^2x''^2} + \cancel{x'^2x''^2}}{1-x'^2} = \frac{x''^2}{1-x'^2} \overset{!}{=} c^2$$

$$\iff \boxed{\frac{x''(s)}{\sqrt{1-x'(s)^2}} = \pm c}$$ éq. diff. ordinaire du 1er ordre en $x'(s)$, non linéaire.

$$\int_0^s \frac{x''(u)}{\sqrt{1-x'(u)^2}}\, du = \pm c \int_0^s du = \pm cs$$

$$\overset{\shortparallel}{\left[\arcsin(x'(u))\right]_0^s} = \arcsin(x'(s)) - \arcsin(x'(0))$$

$$\iff \arcsin(x'(s)) = \pm cs + \arcsin(x'(0))$$

$$\iff x'(s) = \sin(\pm cs + \arcsin(x'(0)))$$

$$\iff \boxed{x(s) = \mp \frac{1}{c} \cos(\pm cs + \arcsin(x'(0))) + x(0)}$$ ($\rho = \frac{1}{c}$ = rayon de courbure !)

$$y'(s) = \pm\sqrt{1 - x'(s)^2} = \pm\sqrt{1 - \sin^2 \square} = \pm \cos \square = \pm\cos(\pm cs + \arcsin(x'(0)))$$

$$\iff \boxed{y(s) = \pm \frac{1}{c} \sin(\pm cs + \arcsin(x'(0))) + y(0)}$$

Conclusion : $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ décrit un cercle centré en $(x(0), y(0))$ de rayon $\frac{1}{c} = \rho$.

$\blacksquare$

Exo 4. Courbe polaire : $\gamma(\varphi) = r(\varphi)\, e^{i\varphi}$ décrite par $r = r(\varphi)$.

1) Sous quelles conditions une courbe polaire est régulière ?
Quels peuvent être les points singuliers ?

- $\gamma(\varphi) = r(\varphi)\, e^{i\varphi}$ est rég ssi $\|\gamma'(\varphi)\| \neq 0$
- $\gamma'(\varphi) = r'(\varphi)\, e^{i\varphi} + i\, r(\varphi) e^{i\varphi} = (r'(\varphi) + i\, r(\varphi))\, e^{i\varphi}$

$$\|\gamma'(\varphi)\| = \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} = 0 \iff \begin{cases} r'(\varphi) = 0 \\ r(\varphi) = 0 \end{cases}$$

- Donc γ est rég en $\gamma(\varphi)$ si $r(\varphi) \neq 0$, i.e. $\gamma(\varphi) \neq (0,0)$, ou bien si $r(\varphi) = 0$ mais $r'(\varphi) \neq 0$, i.e. γ traverse $(0,0)$ sans y rester.

Le seul point singulier possible est l'origine !

2) M.q. si γ est une courbe plane rég, t.q. $\gamma(t) \neq (0,0)$ $\forall t$, alors γ admet une param. polaire ssi $\gamma'(t)$ n'est pas colinéaire à $\gamma(t)$ $\forall t$.

- On peut toujours écrire $\gamma(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}$, et écrire γ en polaire revient à reparamétrer γ dans le paramètre φ.

Ceci est possible ssi la fct $t \mapsto \varphi(t)$ est inversible, avec réciproque $\varphi \mapsto t(\varphi)$, et on a $\gamma(\varphi) = r(t(\varphi))\, e^{i\varphi}$.

- Or, $t \mapsto \varphi(t)$ est inversible ssi $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t$.

Montrons que ceci est équivalent à dire (pour $\gamma \neq (0,0)$) que $\gamma' \not\parallel \gamma$:

$$\gamma(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)} \Rightarrow \gamma'(t) = \underbrace{r'(t)\, e^{i\varphi(t)}}_{\text{vecteur } /\!/ \gamma(t)} + \underbrace{r(t)\, \varphi'(t)\, e^{i(\varphi(t) + \pi/2)}}_{\text{vecteur } \perp \gamma(t)}, \quad r(t) \neq 0 \ \forall t.$$

Alors $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t \iff \gamma'(t)$ a une composante non nulle $\perp \gamma(t)$.

3) Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$, la droite $ax + by + c = 0$ admet une param. polaire ?

- On veut $(x,y) = \gamma(\varphi) = r(\varphi)\, e^{i\varphi} = (r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi)\sin\varphi)$, donc

$$(x,y) \in \text{droite} \iff a\, r(\varphi)\cos\varphi + b\, r(\varphi)\sin\varphi + c = 0$$
$$\iff r(\varphi)\,[a\cos\varphi + b\sin\varphi] + c = 0$$
$$\iff r(\varphi) = -\frac{c}{a\cos\varphi + b\sin\varphi}$$

- Donc droite $= \left\{ \gamma(\varphi) = -\dfrac{c}{a\cos\varphi + b\sin\varphi}\, e^{i\varphi} \ \middle|\ \varphi \in \mathbb{R} \right\}$

4) Ecrire le cusp $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t>0$, en param. polaire.

- $\begin{cases} x = t^2 = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = t^3 = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \underset{t>0}{\Longrightarrow} \begin{cases} \cos\varphi > 0 \\ \sin\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \varphi \in \left]0, \pi\right[\end{cases} \Rightarrow \varphi \in \left]0, \pi/2\right[$

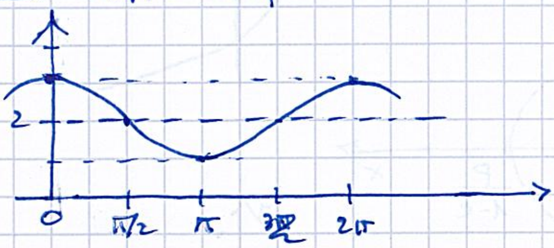
- $r(\varphi)^3\cos^3\varphi = t^6 = r(\varphi)^2\sin^2\varphi \Rightarrow r(\varphi)^2\left[r(\varphi)\cos^3\varphi - \sin^2\varphi\right] = 0$

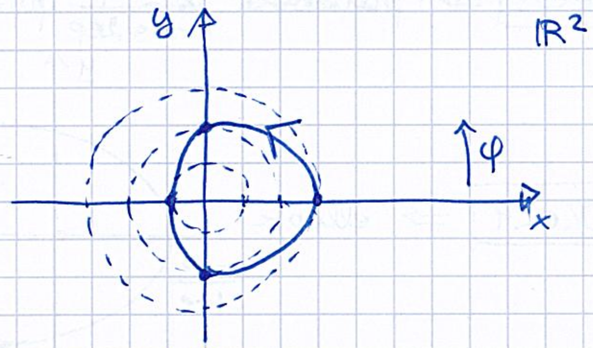
$\underset{r(\varphi)\neq 0}{\Longrightarrow} \quad r(\varphi) = \dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} \Rightarrow \gamma(\varphi) = \dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}\, e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \left]0, \pi/2\right[$.

5) Dessiner la courbe $r(\varphi) = \cos(n\varphi) + 2$ pour $n = 1, 2, 3$.

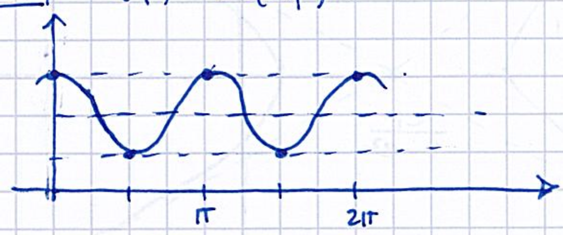
- Pour dessiner une courbe polaire, on dessine d'abord le graphe de la fct $\varphi \mapsto r(\varphi)$, puis on l'enroule autour de l'origine de $\mathbb{R}^2$.

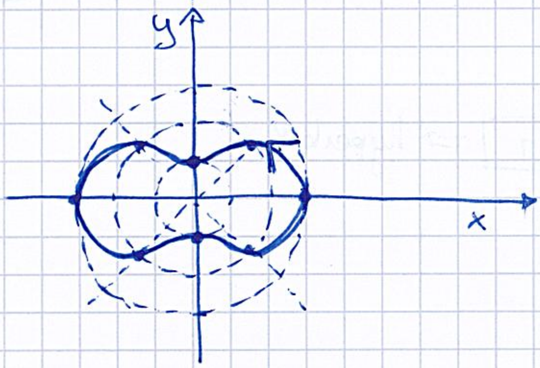
$\boxed{n=1}$ $r(\varphi) = \cos\varphi + 2$



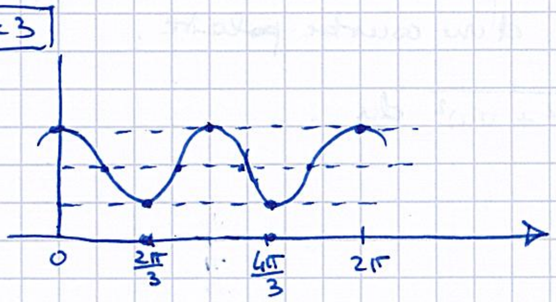


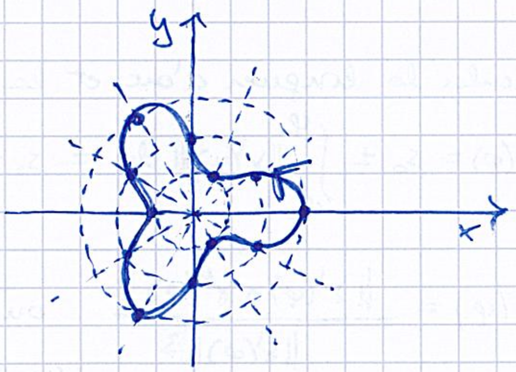
$\boxed{n=2}$ $r(\varphi) = \cos(2\varphi) + 2$





$\boxed{n=3}$





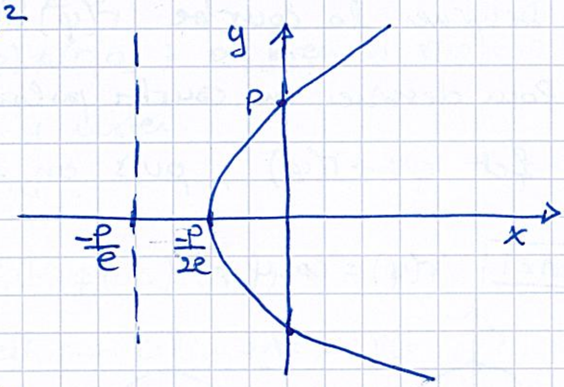
6) Étudier les courbes $r(\varphi)=\dfrac{p}{1-e\cos\varphi}$, $p,e\geq 0$, selon $e<1$, $e=1$, $e>1$.

- $r=\dfrac{p}{1-e\cos\varphi} \iff r-re\cos\varphi=p \iff \cos\varphi=\dfrac{r-p}{re}$

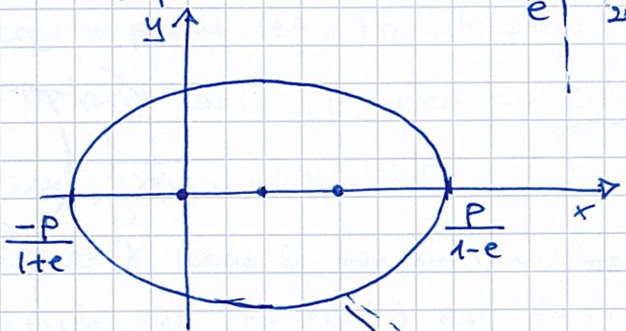
- $\gamma(\varphi)=r(\varphi)e^{i\varphi} \Rightarrow \begin{cases} x(\varphi)=r(\varphi)\cos\varphi=\dfrac{r(\varphi)-p}{e} \\ y(\varphi)=r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \boxed{r=ex+p}$

$$y(\varphi)^2=r(\varphi)^2\sin^2\varphi=r(\varphi)^2(1-\cos^2\varphi)=r^2\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)=r^2-x^2$$
$$=(ex+p)^2-x^2=(e^2-1)x^2+2epx+p^2$$
$$\Rightarrow \boxed{(1-e^2)x^2+y^2-2epx-p^2=0}$$

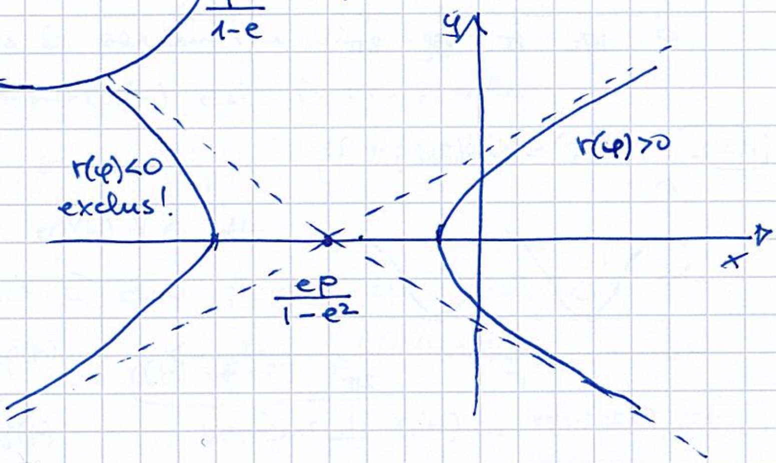
$\boxed{e=1} \Rightarrow$ parabole $x=\dfrac{1}{2ep}y^2-\dfrac{p}{2e}$



$\boxed{0<e<1} \Rightarrow$ ellipse



$\boxed{e>1} \Rightarrow$ hyperbole

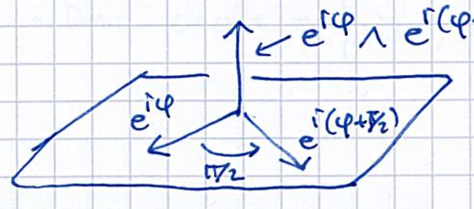


7) Calculer la longueur d'arc et la courbure d'une courbe polaire.

$$s(\varphi)=s_0\pm\int_{\varphi_0}^{\varphi}\|\gamma'(u)\|\,du=s_0\pm\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{r'(u)^2+r(u)^2}\,du.$$

$$k(\varphi)=\frac{\|\gamma'(\varphi)\wedge\gamma''(\varphi)\|}{\|\gamma'(\varphi)\|^3}$$ où

$$\gamma'(\varphi)=r'(\varphi)e^{i\varphi}+r(\varphi)e^{i(\varphi+\pi/2)}$$
$$\gamma''(\varphi)=r''(\varphi)e^{i\varphi}+r'(\varphi)e^{i(\varphi+\pi/2)}+r'(\varphi)e^{i(\varphi+\pi/2)}+r(\varphi)\underbrace{e^{i(\varphi+\pi)}}_{=-e^{i\varphi}}$$
$$=(r''(\varphi)-r(\varphi))e^{i\varphi}+2r'(\varphi)e^{i(\varphi+\pi/2)}$$



Alors :

$$\gamma'(\varphi)\wedge\gamma''(\varphi) = r'(r''-r)\, e^{i\varphi}\wedge e^{i\varphi} + 2r'^2 e^{i\varphi}\wedge e^{i(\varphi+\pi/2)}$$
$$+\, r(r''-r)\, e^{i(\varphi+\pi/2)}\wedge e^{i\varphi} + 2rr'\, e^{i(\varphi+\pi/2)}\wedge e^{i(\varphi+\pi/2)}$$

où $e^{i\varphi}\wedge e^{i\varphi}=0$, $e^{i(\varphi+\pi/2)}\wedge e^{i(\varphi+\pi/2)}=0$, $e^{i(\varphi+\pi/2)}\wedge e^{i\varphi} = -e^{i\varphi}\wedge e^{i(\varphi+\pi/2)}$

et $e^{i\varphi}\wedge e^{i(\varphi+\pi/2)}$ est un vecteur orthogonal au plan de la courbe, de norme 1.

Donc $\|\gamma'(\varphi)\wedge\gamma''(\varphi)\| = |\, 2r'(\varphi)^2 - r(\varphi)(r''(\varphi)-r(\varphi))\,| \cdot \underbrace{\| e^{i\varphi}\wedge e^{i(\varphi+\pi/2)}\|}_{1}$

$$k(\varphi) = \frac{|\,2r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2 - r(\varphi)r''(\varphi)\,|}{(r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2)^{3/2}}.$$

8) Calculer la courbure des coniques $r(\varphi) = \dfrac{p}{1-e\cos\varphi}$ selon $e<1$, $e=1$, $e>1$.

Exo 5 Enveloppe de la famille de droites $\{D_t, t \in I\}$ = courbe $\gamma(t)$ dont les droites D_t sont les tangentes.

1) $D_t = \{ a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \}$ avec a, b, c fcts de classe C^1.

M.q. l'enveloppe $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ vérifie le système

$$\begin{cases} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0 & (1) \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0 & (2) \end{cases}$$

Déduire une paramétrisation de γ.

- $\gamma(t) \in D_t \Leftrightarrow (1)$ est vérifiée.
- On dérive (1) : $a'x + ax' + b'y + by' + c' = 0$.

Or, $ax' + by' = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ car $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ = vecteur normal à D_t

et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \gamma'(t)$ parallèle à D_t.

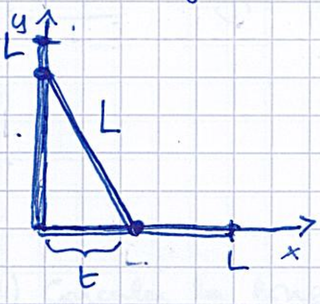
Donc $a'x + b'y + c' = 0 \Rightarrow (2)$.

- Paramétrisation : $\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c(t) \\ -c'(t) \end{pmatrix}$

on peut trouver $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ si $\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0$

et on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ab' - ba'} \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c \\ -c' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ab' - ba'} \begin{pmatrix} -b'c + bc' \\ -a'c + ac' \end{pmatrix}$

2) Exemple : segment de longueur L avec extrêmes qui glissent le long des côtés d'un angle droit : trouver l'enveloppe (astroïde).



Soit t la distance de l'extrême $\in \vec{Ox}$ à l'origine.

D_t est la droite passant par $(t, 0)$ et $(0, \sqrt{L^2 - t^2})$:

$$\frac{x - 0}{t - 0} = \frac{y - \sqrt{L^2 - t^2}}{0 - \sqrt{L^2 - t^2}} \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{L^2 - t^2}}_{a}\, x + \underbrace{t}_{b}\, y \underbrace{- t\sqrt{L^2 - t^2}}_{c} = 0$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{L^2 - t^2} \Rightarrow a' = \dfrac{-\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{L^2 - t^2}} = -\dfrac{t}{\sqrt{L^2 - t^2}} \\ b = t \Rightarrow b' = 1 \\ c = -t\sqrt{L^2 - t^2} \Rightarrow c' = -\sqrt{L^2 - t^2} - t \cdot \dfrac{-\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{L^2 - t^2}} = \dfrac{-(L^2 - t^2) + t^2}{\sqrt{L^2 - t^2}} = \dfrac{2t^2 - L^2}{\sqrt{L^2 - t^2}} \end{cases}$$

$$ab' - ba' = \sqrt{L^2 - t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{L^2 - t^2}} = \frac{L^2 \cancel{- t^2} \cancel{+ t^2}}{\sqrt{L^2 - t^2}} = \frac{L^2}{\sqrt{L^2 - t^2}}$$

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{L^2}{\sqrt{L^2 - t^2}} \cdot \left(t \cdot \dfrac{2t^2 - L^2}{\sqrt{L^2 - t^2}} + t\sqrt{L^2 - t^2} \right) = \dfrac{L^2}{\sqrt{L^2 - t^2}} \, \dfrac{2t^3 \cancel{- L^2 t} \cancel{+ L^2 t} - t^3}{\sqrt{L^2 - t^2}} = \dfrac{L^2 t^3}{L^2 - t^2} \\ y(t) = \dfrac{L^2}{\sqrt{L^2 - t^2}} \left(2t^2 - L^2 - t^2 \right) = \dfrac{L^2 (t^2 - L^2)}{\sqrt{L^2 - t^2}} \end{cases}$$

(erreur dans calculs ?
$\rightsquigarrow$ revoir)

Exo 5

~~Ex 4~~ Enveloppe de droite.

(1) $\gamma(t) \in D_t$ donc $a(t)x(t)+b(t)y(t)+c(t)=0$.

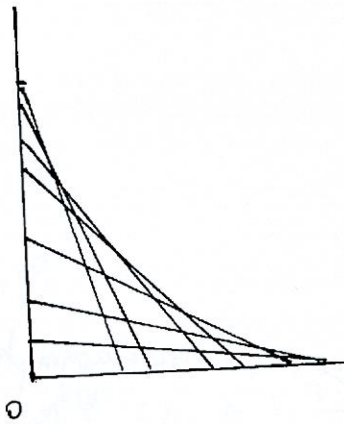
en dérivant par rapport à t $\quad a'(t)x(t)+a(t)x'(t)+b'(t)y(t)+b(t)y'(t)+c'(t)=0$.

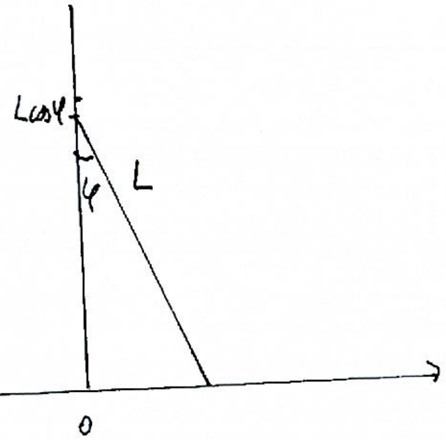
$a'(t)x(t)+a(t)x'(t)+b'(t)y(t)+b(t)y'(t)+c'(t)=0$ $\quad a(t)x'(t)+b(t)y'(t)=0$.

. γ tangente à D_t donc $\gamma'(t)$ vérifie $a(t)x'(t)+b(t)y'(t)=0$.

γ vérifie bien $\begin{cases} a(t)x(t)+b(t)y(t)+c(t)=0 \\ a'(t)x(t)+b'(t)y(t)+c'(t)=0 \end{cases}$.

(2).





On paramétrise la famille de droite par $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}$.

On a D_φ : $\cos(\varphi)(x) + \sin(\varphi)(y - L\cos\varphi) = 0$

$$\cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y = L\cos\varphi\sin\varphi.$$

D'après la question précédente, l'enveloppe $\gamma(\varphi)$ vérifie :

$$\begin{cases} \cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y = L\cos\varphi\sin\varphi. \\ -\sin(\varphi)x + \cos(\varphi)y = L(\cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2) \end{cases}$$

D'où $x(\varphi) = \begin{vmatrix} L\cos\varphi\sin\varphi & \sin\varphi \\ L(\cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2) & \cos\varphi \end{vmatrix} = L\left(\cos(\varphi)^2\sin\varphi - \cos(\varphi)^2\sin\varphi + \sin(\varphi)^3\right)$.

$$= \underline{L\sin(\varphi)^3}$$

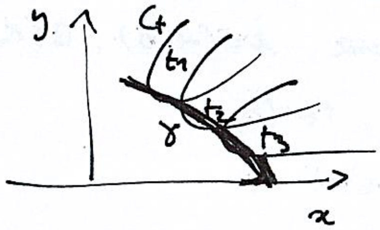
$$y(\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & L\cos\varphi\sin\varphi \\ -\sin\varphi & L(\cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2) \end{vmatrix} = \underline{L\cos(\varphi)^3}.$$

c'est bien une paramétrisation de l'astroïde.

(Comparer à l'exercice 2, en reparamétrant φ par translation).

~~Exo5~~ **Exo6** Enveloppe d'une famille de courbes $C_t = \{\alpha_t(u) \mid u \in \mathbb{R}\}$ param. par $t \in \mathbb{R}$

= courbe $\gamma(t)$ dont les tangentes sont le "contour apparent" des C_t,



def : $E = \{ \gamma(t) := \alpha_t(u)$ déf par $F(t,\alpha_t(u)) = 0$ pour u tq. $\frac{\partial}{\partial t} F(t,\alpha_t(u)) = 0 \}$

ex : $\alpha_t(u)$ = droite D_t param. par u

$a(t)\,x_t(u) + b(t)\,y_t(u) + c(t) = 0$

où u est tq. $a'(t)\,x(u) + b'(t)\,y(u) + c'(t) = 0$.

(1) Mq $\forall (t,u)$ on a $\partial_u \alpha_t(u) \perp \nabla F_t(\alpha_t(u))$ où $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$.

On pose $\tilde F(t,u) := F(t,\alpha_t(u))$ et $\alpha_t(u) = (x_t(u), y_t(u))$.

Puisque $\alpha_t(u) \in E \Rightarrow F(t,\alpha_t(u)) = 0\ \forall t, \forall u$, on a $\tilde F(t,u) \equiv 0\ \forall t, \forall u$.

Donc $\frac{\partial \tilde F}{\partial u}(t,u) = 0\ \forall t\, \forall u$, i.e. $\frac{\partial F}{\partial x}(t,\alpha_t(u)) \cdot \frac{\partial}{\partial u} x_t(u) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y_t}{\partial u} = \nabla F_t(\alpha_t(u)) \cdot \frac{\partial}{\partial u}\alpha_t(u) =$ ☒

(2) Mq. $\forall (t,u)$ on a : $\alpha_t(u) \in E$ ssi $\det\left(\partial_t \alpha_t(u), \partial_u \alpha_t(u)\right) = 0$. (*)

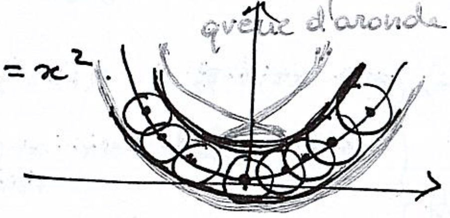
i.e. $\partial_t \alpha_t(u) \,//\, \partial_u \alpha_t(u)$. (*)

Puisque $\partial_u \alpha_t(u)$ est $\perp$ $\nabla F_t(\alpha_t(u))$, (*) $\Leftrightarrow$ $\partial_t \alpha_t(u) \perp \nabla F_t(\alpha_t(u))$.

On reprend $\tilde F(t,u) = F(t,\alpha_t(u)) \equiv 0$, ~~et on~~ alors

$\frac{\partial \tilde F}{\partial t}(t,u) \equiv 0$ ie. $\underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}(t,\alpha_t(u))}_{\text{mais } = 0} + \underbrace{\nabla F_t(\alpha_t(u)) \cdot \partial_t \alpha_t(u)}_{\text{donc } = 0} = 0$ ☒

(3) Enveloppe de cercles unitaires centrés sur la parabole $y = x^2$.



$\Rightarrow$ on a deux contours apparents.

• C_t = cercle unitaire centré en (t, t^2) :

$\alpha_t(u) = (t, t^2) + e^{iu}$ $\quad u \in [0, 2\pi]$

$= (t + \cos u, t^2 + \sin u)$ $\quad$ i.e. $F(t,x,y) = (x-t)^2 + (y-t^2)^2 - 1 = 0$

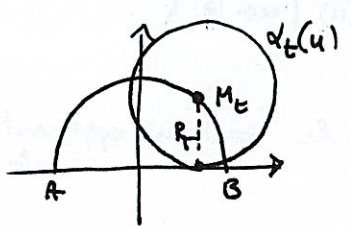
Alors $\begin{cases} \partial_t \alpha_t(u) = (1, 2t) \\ \partial_u \alpha_t(u) = (-\sin u, \cos u) \end{cases}$ donc (*) $\Leftrightarrow \cos u + 2t \sin u = 0 \Leftrightarrow \cos u = -2t \sin u$

$\Leftrightarrow 1 = \cos^2 u + \sin^2 u = (4t^2+1)\sin u \Leftrightarrow \sin u = \frac{\pm 1}{\sqrt{4t^2+1}}$

Donc $\gamma(t) = \left(t \mp \frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}, t^2 \pm \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}} \right)$ faire l'étude de la courbe, en part; chercher les pts singuliers.

• Idée à la craie : (*) signifie que $\gamma'(t) = \partial_t \alpha_t(u)$ est normale au vecteur $\begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix}$, le seul pt est $u = \pi/2$

(4)



Enveloppe des cercles $\alpha_t(u)$ centrés sur un cercle et tangents à un diamètre (équateur).

On prend un cercle de rayon R centré en $(0,0)$ et son diamètre AB avec $A=(-R,0)$, $B=(R,0)$.

Alors, le centre du cercle $\alpha_t(u)$ est $M_t = Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$

et le rayon es $R_t = \mathrm{dist}(M_t, \vec{Ox}) = R\sin t$.

Donc
$$\alpha_t(u) = M_t + R_t e^{iu}, \quad u\in[0,2\pi]$$
$$= Re^{it} + R\sin t\, e^{iu}$$
$$= R(\cos t + \sin t\cos u,\ \sin t(1+\sin u))$$

Alors $E = \{\gamma(t) := \alpha_t(u) \mid u \text{ satisfait l'ép. } \det(\frac{\partial}{\partial t}\alpha_t(u), \frac{\partial}{\partial u}\alpha_t(u)) = 0\}$ $(*)$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\alpha_t(u) = R(-\sin t + \cos t\cos u,\ \cos t(1+\sin u)) \\ \frac{\partial}{\partial u}\alpha_t(u) = R(-\sin t\sin u,\ \sin t\cos u) \end{cases}$$

$(*) \Leftrightarrow (-\sin t + \cos t\cos u)\sin t\cos u + \cos t(1+\sin u)\sin t\sin u = 0$

$\sin t\,[-\sin t\cos u + \cos t\cos^2 u + \cos t\sin u + \cos t\sin^2 u] = 0$

$\sin t\,(\cos t - (\sin t\cos u - \cos t\sin u)) = \sin t\,(\cos t - \sin(t-u)) = 0$

$\Leftrightarrow$ soit $\sin t = 0$ ie $t = 0,\pi$ $\Leftrightarrow$ pts A, B

soit $\sin(t-u) = \cos t = \sin(t+\pi/2) \Leftrightarrow \begin{cases} t-u = t+\pi/2 \\ t-u = \pi-(t+\pi/2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\pi/2 \\ u = 2t-\pi/2 \end{cases}$

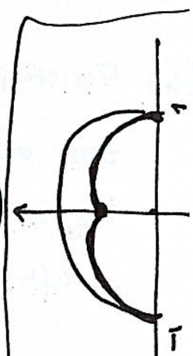
On a donc deux branches de courbe pour E:

1) pour $u=-\pi/2$: $\gamma(t) = \alpha_t(-\pi/2) = R(\cos t + \sin t \underbrace{\cos(-\pi/2)}_{=0}, \sin t(1+\underbrace{\sin(-\pi/2)}_{-1})) = (R\cos t, 0)$

décrit le segment $[A,B] = \{(R\cos t, 0) \mid t\in\mathbb{R}\}$

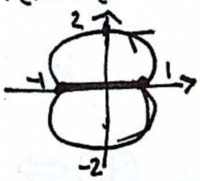
2) pour $u = 2t-\pi/2$: $\gamma(t) = (x(t),y(t)) = \alpha_t(2t-\pi/2)$ avec

$$\gamma(t)\begin{cases} x(t) = R(\cos t + \sin t \underbrace{\cos(2t-\pi/2)}_{+\sin(2t)}) = R(\cos t + \sin t\sin(2t)) = \frac{R}{2}(3\cos t - \cos(3t)) \\ y(t) = R(\sin t(1 + \underbrace{\sin(2t-\pi/2)}_{-\cos(2t)})) = R\sin t(1-\cos(2t)) = \frac{R}{2}(3\sin t - \sin(3t)) \end{cases}$$

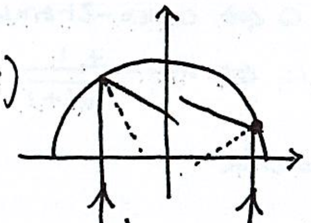


m.q. néphroïde

c'est encore un néphroïde



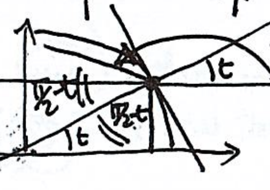
(5)



parotie $x^2+y^2=1$ avec $y\geq 0$ param e^{it}, $t\in[0,\pi]$

famille de droites D_t param $\alpha_t(u) = e^{it} + u\, e^{i(2t+\pi/2)}$

$\Rightarrow \alpha_t(u) = (\cos t - u\sin(2t),\ \sin t + u\cos(2t))$



angle $= t+\pi-(\frac{\pi}{2}-t)$
$= t+\pi-\frac{\pi}{2}+t$
$= 2t+\pi/2$

$(*)$: $\frac{\partial}{\partial t}\alpha_t(u) = (-\sin t - 2u\cos(2t),\ \cos t - 2u\sin(2t))$

$\frac{\partial}{\partial u}\alpha_t(u) = (-\sin(2t),\ \cos(2t))$

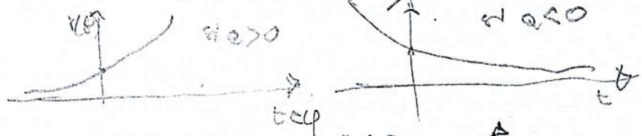
$\det(\frac{\partial}{\partial t}\alpha_t(u), \frac{\partial}{\partial u}\alpha_t(u)) = 2u - \sin t = 0 \Rightarrow u = \frac{\sin t}{2}$: $\gamma(t) = \alpha_t(\frac{\sin t}{2})$

~~Ex. (3)~~ Exo 9

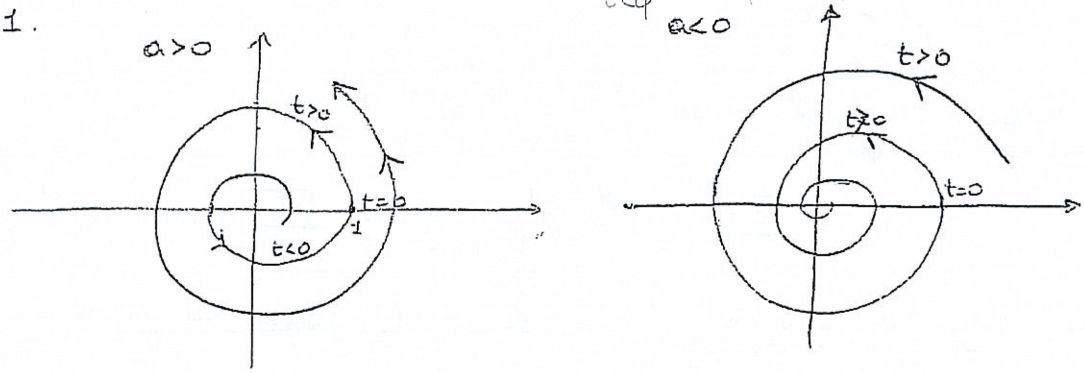
$\gamma(t)$ en polaire

Spirale logarithmique $\gamma(t) = e^{at}(\cos t, \sin t) = e^{at}e^{it}$, $t\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.

1) Dessiner la spirale log.



$\gamma(0) = 1$.



2) Calculer l'abscisse curviligne

$\gamma'(t) = a e^{at}e^{it} + i e^{at}e^{it} = (a+i)e^{at}e^{it}$

$|\gamma'(t)| = \sqrt{a^2+1}\, e^{at}$, car $|e^{it}|=1$

$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\gamma'(u)|\,du = \sqrt{a^2+1}\int_{t_0}^{t} e^{au}\,du = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\left[e^{au}\right]_{t_0}^{t} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}e^{at} - \underbrace{\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}e^{at_0}}_{s_0}$

$\Rightarrow$ suffit $s(t) = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}e^{at}$; $t\in\mathbb{R} \Rightarrow s>0$ si $a>0$ et $s<0$ si $a<0$
(i.e. $t_0=-\infty$ si $a>0$)

reparamétrage : $s = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}e^{at} \Rightarrow \frac{as}{\sqrt{a^2+1}} = e^{at} \Rightarrow t(s) = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{as}{\sqrt{a^2+1}}\right| = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{as}{\sqrt{a^2+1}}\right)$

$\gamma(s) = \gamma(t(s)) = e^{\frac{a}{a}\ln\left(\frac{as}{\sqrt{a^2+1}}\right)} e^{i\frac{1}{a}\ln\left(\frac{as}{\sqrt{a^2+1}}\right)} = \frac{as}{\sqrt{a^2+1}} e^{\frac{i}{a}\ln\left(\frac{as}{\sqrt{a^2+1}}\right)}$ (← d'où le nom !)

Calculer la courbure : démontrer ceci à partir de la déf : $\vec{t}\,' = k\vec{n}$

$$\boxed{k(t) := \frac{|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}}$$

$\gamma'(t) = e^{at}(a\cos t - \sin t, a\sin t + \cos t)$, $|\gamma'(t)| = \sqrt{a^2+1}\,e^{at}$

$\gamma''(t) = e^{at}\left((a^2-1)\cos t - 2a\sin t, (a^2-1)\sin t + 2a\cos t\right)$

$$k(t) = \frac{\left|e^{2at}\left((a\cos t - \sin t)[(a^2-1)\sin t + 2a\cos t] - (a\sin t + \cos t)[(a^2-1)\cos t - 2a\sin t]\right)\right|}{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}\,e^{3at}}$$

$$= \frac{e^{2at}(a^2+1)}{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}\,e^{3at}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}\,e^{at}}$$

En le paramètre par long. d'arc :

$k(s) = k(t(s)) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}\,e^{\frac{a}{a}\ln\left(\frac{as}{\sqrt{a^2+1}}\right)}} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}\,as} = \frac{1}{as}$

Directement : $\gamma'(s) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} e^{i/a \ln\left(\frac{as}{\sqrt{a^2+1}}\right)}\left(1+\frac{i}{a}\right)$

$\gamma''(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left(i - \frac{1}{a}\right)\frac{1}{s} e^{i/a\ln\left(\frac{as}{\sqrt{a^2+1}}\right)}$

$k(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}\,\frac{1}{|s|} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}\,|a||s|} = \frac{1}{|as|} = \frac{1}{as}$.

Ex ③ suite

3) $\underline{\text{M.q. } \gamma(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} (0,0) \text{ si } a>0.}$

$$\gamma(t) = e^{at} e^{it} \xrightarrow[t\to-\infty]{a>0} 0 \cdot \underset{\text{unitaire}}{\text{cercle}} = (0,0).$$

$\underline{\text{M.q. } L_t^{\theta}(\gamma) := \int_t^{\theta} |\gamma'(u)|\, du \xrightarrow[t\to-\infty]{a>0} \text{limite finie}}$

$$L_t^{\theta}(\gamma) = s(\theta) - s(t) = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\left(e^{a\theta} - e^{at}\right) \xrightarrow[t\to-\infty]{} \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} < \infty .$$

---

4) <u>Quelles sont les courbes planes dont le rayon de courbure est proportionnel à l'arc ?</u>

- <u>Spirale log</u> : $\rho(s) = \frac{1}{k(s)} = as \propto s$ ok.
- Puisque la courbure (et donc ρ) détermine la courbe γ à déplacement près, les courbes planes avec $\rho(s) \propto s$ sont des spirales log..

---

5) <u>M.q. la tangente à la spirale log. fait un angle constant avec la droite joignant le point courant à l'origine.</u>

I.e., m.q. $\left\langle \frac{\gamma(s)}{\|\gamma(s)\|}, \gamma'(s) \right\rangle = c = \cos\alpha \in [-1,1]$ pour la spirale.

$$\|\gamma(s)\|' = \sqrt{\langle \gamma(s), \gamma(s)\rangle}' = \frac{2\langle \gamma, \gamma'\rangle}{2\sqrt{\langle\gamma,\gamma\rangle}} = \left\langle \frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}, \gamma'(s)\right\rangle = c \iff$$

$$|\gamma(s)| = cs + b \ ; \ b \in \mathbb{R}.$$

Pour la spirale : $|\gamma(s)| = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\, s$ ok avec $c = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ et $b = 0$.

<u>Trouver toutes les courbes planes t.q. $\left\langle \frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}, \gamma'(s)\right\rangle = c$.</u> (*)

Courbe générique : $\gamma(s) = r(s)\, e^{if(s)}$, (*) $\iff r(s) = cs+b$. Alors :

$$\gamma'(s) = c\, e^{if(s)} + (cs+b)\, i f'(s)\, e^{if(s)} = \left[c + i(cs+b) f'(s)\right] e^{if(s)}$$

$$|\gamma'(s)|^2 = 1 \iff c^2 + (cs+b)^2 f'(s)^2 = 1 \iff f'(s) = \pm\frac{\sqrt{1-c^2}}{cs+b}$$

$c \neq 0$: $f(s) = \pm\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\int_{s_0}^{s} \frac{c\,du}{cu+b} = \pm\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\ln(cs+b) + f(s_0)$

$c \neq \pm 1 \implies \gamma(s) = (cs+b)\, e^{i \frac{\pm\sqrt{1-c^2}}{c}\ln(cs+b)} \cdot e^{if(s_0)} \to$ spirale log

$c = \pm 1$, $f'(s) = 0 \implies$ droite

$c = 0$: $\gamma(s) = b\, e^{if(s)}$

$b \neq 0$: $\gamma'(s) = b\, i f'(s)\, e^{if(s)} \implies |\gamma'(s)|^2 = b^2 f'(s)^2 = 1 \iff f'(s) = \pm\frac{1}{b} \implies f(s) = \pm$

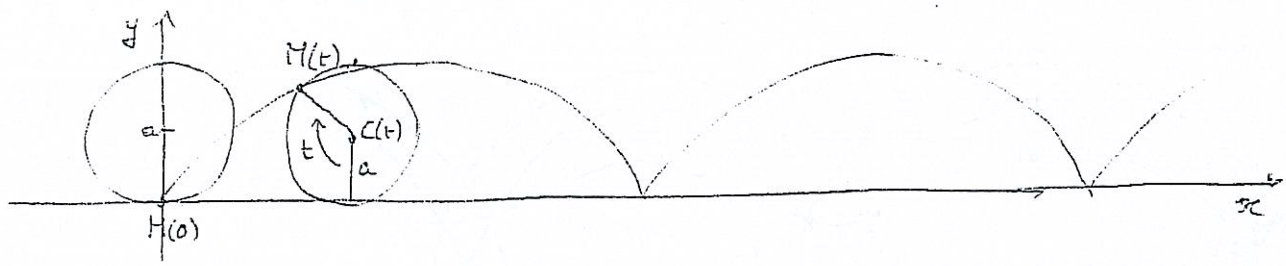
Donc $\gamma(s) = b\, e^{\pm i \frac{s}{b}}$ est un cercle de rayon b.

$b = 0 \implies \gamma(s) = (0,0)$

Exo 10

Ex 4 cycloïde : courbe décrite par un point sur le bord d'une roue.

1) Dessiner la cycloïde, donner un paramétrage.



$\vec{OC} = (at, a)$
$\vec{CM} = (-a\sin t, -a\cos t)$ $\Big\} \Rightarrow \vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM} = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$

$\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $a > 0$. $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer les points singuliers :

$\gamma'(t) = (a(1 - \cos t), a\sin t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$(\cos t = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2}$ ...

2) Calculer l'abscisse curviligne :

$|\gamma'(t)| = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}} = 2a|\sin\frac{t}{2}|$

$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{2}\, a\sqrt{1 - \cos u}\, du = \sqrt{2}\, a \int_{t_0}^{t} \sqrt{2}\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}}\, du = 2a\int_{t_0}^{t} \sin\left(\frac{u}{2}\right) du$

$= 4a \int_{t_0}^{t} \sin\left(\frac{u}{2}\right)\frac{du}{2} = 4a\left[-\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right]_{t_0}^{t} = -4a\cos\left(\frac{u}{2}\right) + s_0$

suffit : $s(t) = +4a\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

reparamétrage : $\cos\left(\frac{t}{2}\right) = +\frac{s}{4a} \Rightarrow t = 2\arccos\left(+\frac{s}{4a}\right)$

$\Rightarrow \gamma(s) = \gamma(t(s))$ est horrible !

Calculer la courbure :

$\gamma''(t) = (a\sin t, a\cos t)$

$|\gamma' \wedge \gamma''| = a^2|(1 - \cos t)\cos t - \sin^2 t| = a^2|\cos t - 1| = a^2(1 - \cos t) = a^2\, 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$

$k(t) = \frac{|\gamma' \wedge \gamma''|}{|\gamma'|^3} = \frac{a^2(1 - \cos t)}{a^3\, 2\sqrt{2}\,(1 - \cos t)\sqrt{1 - \cos t}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\, a\sqrt{1 - \cos t}} = \frac{1}{4a|\sin(\frac{t}{2})|}$.

Courbure en paramètre par long. d'arc :

$s(t) = +4a\cos\left(\frac{t}{2}\right) = +4a\frac{\sqrt{1 + \cos t}}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + \cos t = 2\cdot\frac{s^2}{16a^2} = \frac{s^2}{8a^2}$

$\Rightarrow 1 - \cos t = 1 - \frac{s^2}{8a^2} + 1 = 2 - \frac{s^2}{8a^2} = \frac{16a^2 - s^2}{8a^2}$

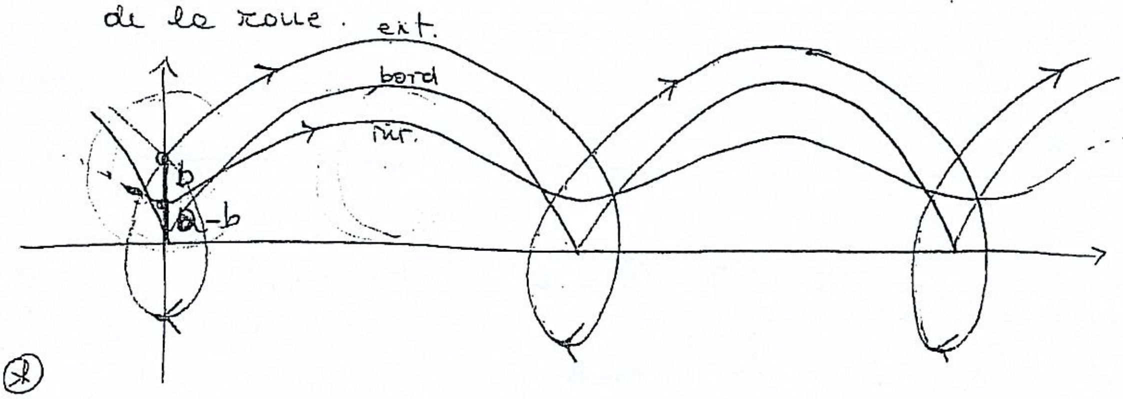
$k(s) = \frac{2\sqrt{2}\, a}{2\sqrt{2}\, a\sqrt{16a^2 - s^2}} = \frac{1}{\sqrt{16a^2 - s^2}}$.

Longueur $L_0^{2\pi}(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt = 4a\int_0^{\pi} \sin u\, du = 4a\left[-\cos u\right]_0^{\pi}$

$= 4a(-\cos\pi + \cos 0) = 8a$.

Ex 4 suite

4) Courbes décrites par des points à l'intérieur et à l'extérieur de la roue.

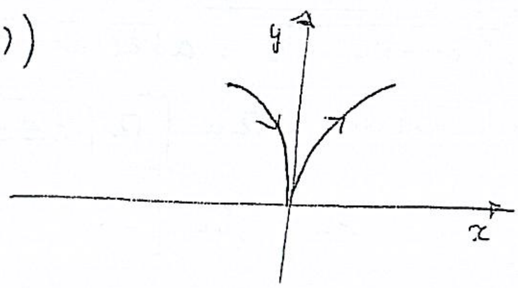


5) Dessiner les points de singularité :

$$\gamma(t) = a(t-\sin t,\ 1-\cos t) \underset{t\to 0}{\sim} a\left(t-t+\frac{t^3}{6}+o(t^5),\ 1-1+\frac{t^2}{2}+o(t^4)\right)$$

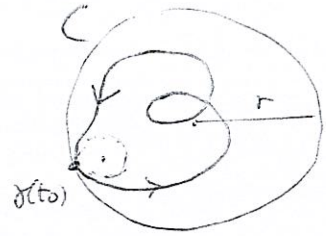
$$\gamma(t) \underset{t\to 0}{\sim} a\left(\frac{t^3}{6}+o(t^5),\ \frac{t^2}{2}+o(t^4)\right)$$

point cuspidal :



eq. paramétrique des pts à l'intérieur, de dist b du centre de la roue

Exercice ~~10~~ Exo 11



Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe (~~régulière~~ birégulière) contenue dans un cercle C_r t.q. $\exists\, t_0 \in I$ $\gamma(t_0) = m \in C$.

M.q. 1) le cercle osculateur de γ en $\gamma(t_0)$ est situé vers l'intérieur du cercle C (i.e. que le vecteur normal à γ en $\gamma(t_0)$ pointe vers l'intérieur du cercle)

2) $\rho(t_0) = \frac{1}{k(t_0)} \le r$

---

1) cercle osculateur de γ en $\gamma(t_0)$ = cercle de rayon $\rho(t_0) = \frac{1}{k(t_0)}$ et de centre I t.q. $\overrightarrow{\gamma(t_0)\, I(t_0)} = \rho(t_0)\,\vec{n}(t_0)$

où $\vec{n}(s_0)$ = vecteur normal principal, i.e. t.q. $\overrightarrow{\gamma''(s_0)} = k(s_0)\,\vec{n}(s_0)$

Alors, supposons que γ soit paramétrée par longueur d'arc, $\gamma = \gamma(s)$, donc $\gamma'(s_0) \perp \gamma''(s_0)$

Surement $\gamma' \perp \gamma''$ et γ tant. au cercle $\Rightarrow$ γ localement $\subset$ cercle ~~autour de~~ (ce sont par $\gamma(s_0)$), donc $k(s_0) \ne 0$ $\Downarrow$ γ birég. en s_0

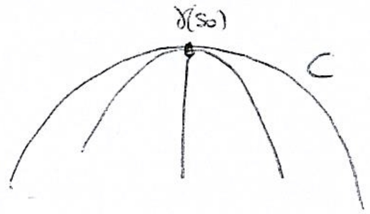
D'abord, on montre que γ est birégulière en $\gamma(t_0)$, i.e. que $\gamma'(s_0)$ et $\gamma''(s_0)$ sont lin. indépendants (équiv. à $k(s_0) \neq 0$)

En effet, on sait que $\|\gamma'(s)\| = 1$, donc

$$\|\gamma'(s)\|' = \sqrt{\langle \gamma', \gamma' \rangle}\,' = \frac{2\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{\langle \gamma', \gamma' \rangle} = \frac{1}{\|\gamma'\|^2} \langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma' \perp \gamma''}.$$

Puisque $\gamma''(s_0) = a\,\gamma(s_0) + b\,\gamma'(s_0)$ et $\gamma' \perp \gamma''$, on a $b = 0$.

Pour montrer que le cercle osculateur est à l'intérieur de C, il faut que $\rho(s_0) \le r$ et que γ'' pointe au contraire de γ, c'est à dire que $a < 0$



Soit $O = (0,0)$ le centre de C, alors :

$\gamma(I) \subset C \Rightarrow$ déf. $f(s) := \|\gamma(s)\|^2 \le r^2$

(et $\gamma(s_0) = m \in C \Rightarrow f(s_0) = r^2$)

Alors $f'(s) = 2\langle \gamma(s), \gamma'(s) \rangle$ (en part. $f'(s_0) = 0 \Rightarrow \gamma(s_0) \perp \gamma'(s_0) \Rightarrow \gamma''(s_0) = a\,\gamma(s_0)$

but : $a < 0$.

$f''(s_0) = 2\langle \gamma', \gamma' \rangle + 2\langle \gamma, \gamma'' \rangle = 2\left(1 + a\,\|\gamma(s)\|^2\right)$

s_0 point de max pour $f(s)$ $\Rightarrow f''(s_0) < 0$

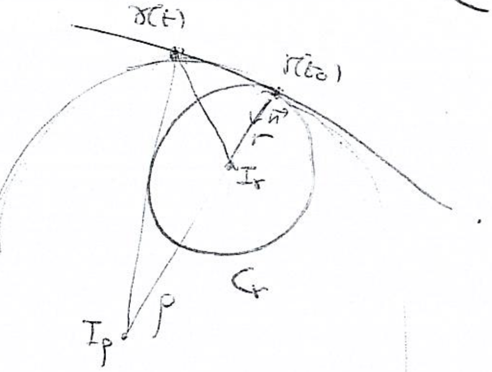
$\|\gamma(s_0)\| = r \Rightarrow f''(s_0) = 2(1 + a r^2) < 0 \Rightarrow a < -\frac{1}{r^2} \Rightarrow a < 0$!

2) Enfin $k(s_0) = \|\gamma''(s_0)\| = \|a\,\gamma(s_0)\| = |a|\,\underbrace{\|\gamma(s_0)\|}_{r} > \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}$ = courbure de C

$a r^2 < -1 \Rightarrow |a r^2| > 1 \Rightarrow |a| > \frac{1}{r^2}$

Donc $\rho(s_0) = \frac{1}{k(s_0)} < r$ = rayon de C.

~~Exercice 11~~ Exo 12



Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière, ~~avec~~

Soit C_r un cercle de rayon r tangent à γ en $m=\gamma(t_0)$ et situé dans le demi-plan de concavité de γ en m.

Soit $\rho=\rho(t_0) = \frac{1}{k(t_0)} < \infty$ (i.e. $k(t_0)>0$).

M.q. pour $t \longrightarrow t_0$:

$r>\rho \Rightarrow \gamma(t)$ est à l'intérieur de C_r

$r<\rho \Rightarrow \gamma(t)$ est à l'extérieur de C_r

Déf Par déf, le cercle osculateur de γ en t_0 est le cercle tang. à γ en $\gamma(t_0)$, de rayon $\rho(t_0) = \frac{1}{k(t_0)}$ placé du coté de la concavité.

Lemme Il est aussi la limite du cercle tangent à γ en $\gamma(t_0)$ et passant par $\gamma(t)$ avec $t \to t_0$. (*)

Soit donc : $t \to t_0$, cercle osculateur C_ρ tang. en $\gamma(t_0)$ et passant par $\gamma(t)$, de rayon ρ et centre I_ρ.

Alors $|\overrightarrow{\gamma(t) I_\rho}| = \rho \pm \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$

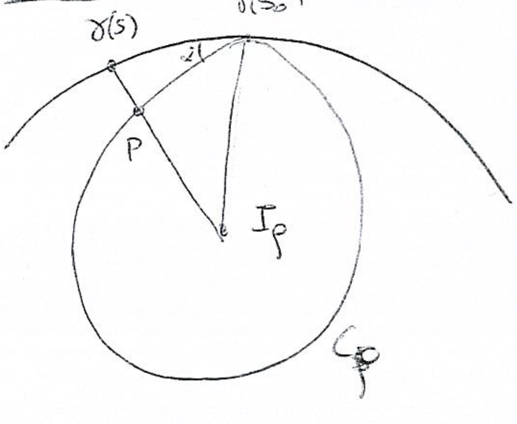
Soit C_r le cercle tang. en $\gamma(t_0)$ de rayon r et centre I_r :

$r<\rho \Rightarrow |\overrightarrow{\gamma(t) I_r}| + |\underbrace{\overrightarrow{I_r I_\rho}}_{\rho - r}| > |\underbrace{\overrightarrow{\gamma(t) I_\rho}}_{\rho \pm \varepsilon}| \Rightarrow |\gamma(t) I_r| > r \pm \varepsilon \Rightarrow |\gamma(t) I_r| \geq r$ i.e. $\gamma(t)$ extérieur à C_r,

$r>\rho \Rightarrow \underbrace{|\overrightarrow{\gamma(t) I_\rho}|}_{\rho} + |\underbrace{\overrightarrow{I_\rho I_r}}_{r-\rho}| > |\overrightarrow{\gamma(t) I_r}| \Rightarrow |\overrightarrow{\gamma(t) I_r}| < r \pm \varepsilon \Rightarrow |\gamma(t) I_r| \leq r$ i.e. $\gamma(t)$ intérieur à C_r. ∎

(*) M.q. cercle osculateur en $\gamma(s_0) = \lim_{s \to s_0}$ cercle tang. à $\gamma(s_0)$ par $\gamma(s)$.

Preuve



$$|\overrightarrow{\gamma(s) I_\rho}| = |\overrightarrow{\gamma(s) P}| + |\underbrace{\overrightarrow{P I_\rho}}_{=\rho}| \xrightarrow[s \to s_0]{} 0 + \rho$$

$$|\overrightarrow{\gamma(s) P}| \xrightarrow[s \to s_0]{} d(s)\,|s-s_0|, \quad d(s) \to 0, \quad |s-s_0| \to 0$$

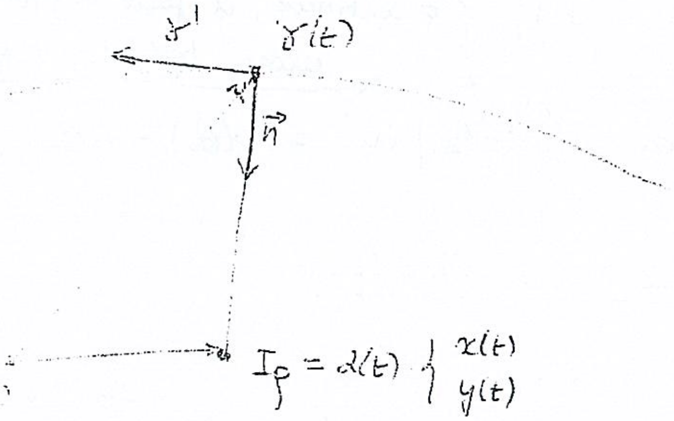
Donc $\gamma(s) \xrightarrow[s \to s_0]{} pt \in C_\rho$ ∎

Exo 13

7 Développées :

DÉVELOPPÉES

1)



Écrire l'équation paramétrique.

$$\overrightarrow{I_p\gamma(t)} = \rho(t)\,\vec{n}(t) \implies \boxed{\alpha(t) = \gamma(t) + \rho(t)\,\vec{n}(t)}$$

2) $\alpha'(t) = \gamma'(t) + \rho'(t)\,\vec{n}(t) + \rho(t)\,\vec{n}'(t)$ $\qquad \vec{n}'(t)$ ~~complexité~~ $= \|\gamma'\|(-k\,T + \tau B)$, $\tau = 0$

on se met dans le param. s par longueur d'arc s

Alors $\vec{n}(s) = \dfrac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}$, $\langle\gamma', \gamma''\rangle = 0$ et $\vec{n}'(s) = -k\,\vec{t}$

$\alpha(s) = \gamma(s) + \rho(s)\,\vec{n}(s)$

$\alpha'(s) = \gamma'(s) + \rho'(s)\,\vec{n}(s) - \rho(s)\,k(s)\,\vec{t} = \vec{t} - \vec{t} + \rho'(s)\,\vec{n}(s)$ ~~$= 0 \iff \rho'(s)$~~

$\hookrightarrow \|\gamma'\|\vec{T} + \rho'\,\vec{N} - \rho\|\gamma'\|k\,T$

Donc $\alpha'(s) = 0 \iff \rho'(s) = 0$ $\qquad \overset{\rho k = 1}{=} \|\gamma'\|(1-\rho k)T + \rho'\,\vec{N} = \rho'\vec{N}$

$\rho(s) = \dfrac{1}{k(s)} \implies \rho'(s) = -\dfrac{k'(s)}{k(s)^2} = 0 \iff k'(s) = 0$

3) M.q. tangente à α en $\alpha(t)$ est la normale à γ en $\gamma(t)$:

i.e. $\alpha'(t) = a\,\vec{n}(t)$.

Déjà fait pour $t = s$: $\alpha'(s) = \rho'(s) - \dfrac{k'(s)}{k(s)^2}\,\vec{n}(s)$. $\quad \alpha'(t) = \rho'(t)\,\vec{n}$

1.B Pour t cela est vrai $\iff \gamma'(t) + \rho(t)\,n'(t) = 0$

$\iff n'(t) = -\dfrac{|\gamma'(t)|\,\vec{t}}{\rho(t)} = -|\gamma'(t)|\,k(t)\,\vec{t}(t)$. (avec $\vec{B} \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^2$)

Dans ce cas : $\alpha'(t) = \rho'(t)\,\vec{n}(t) = -\dfrac{k'(t)}{k(s)^2}\,\vec{n}(t)$

Preuve de $n'(t) = -k(t)\,|\gamma'(t)|\,\vec{t}(t) = -k(t)\,\gamma'(t)$:

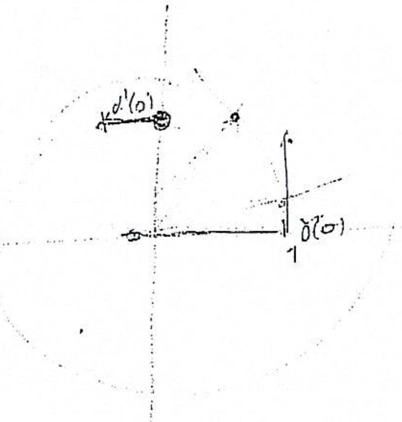
$n'(t) = \dfrac{dn(s)}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt}$ et $\begin{cases} \dfrac{dn}{ds} = -k\,\vec{t} = -k\,\dfrac{\gamma'(t)}{|\gamma'(s)|} \\ \dfrac{ds}{dt} = |\gamma'(t)| \end{cases}$

x (7)

4) M.q. $L_t^{t'}(\alpha) = |\rho(t) - \rho(t')|$ ρ' continue, il faut supposer que $\rho' \neq 0$, alors $|\rho'(u)| = \pm \rho'(u)$ et

$$L_t^{t'}(\alpha) := \int_t^{t'} |\alpha'(u)|\, du = \int_t^{t'} |\rho'(u)|\, du = |\rho(t') - \rho(t)|.$$

(6) developpée de la spirale logarithmique



$$\gamma(t) = (e^{at}\cos t,\ e^{at}\sin t) = e^{at} e^{it}$$

$$k(t) = \frac{-1}{\sqrt{a^2+1}\, e^{at}} \qquad \rho(t) = \sqrt{a^2+1}\, e^{at} \qquad \rho' > 0$$

$$\alpha(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)} \vec{n}(t) \qquad \vec{t}_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \vec{n}_\gamma(t)$$

$$\gamma'(t) = \left(e^{at}(a\cos t - \sin t),\ e^{at}(a\sin t + \cos t)\right)$$
$$= (a+i)\, e^{at} e^{it}$$

$$\Rightarrow \vec{n}(t) \propto (-a\sin t - \cos t,\ a\cos t - \sin t) = v$$

$$\|v\| = \sqrt{(a\sin t + \cos t)^2 + (a\cos t - \sin t)^2} = \sqrt{a^2+1}$$

$$\Rightarrow \vec{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(-a\sin t - \cos t,\ a\cos t - \sin t)$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = (e^{at}\cos t,\ e^{at}\sin t) + e^{at}(-a\sin t - \cos t,\ a\cos t - \sin t)$$
$$= e^{at}(\cos t - a\sin t - \cos t,\ \sin t + a\cos t - \sin t)$$
$$= e^{at}(-a\sin t,\ a\cos t) = |a| e^{at} e^{i(t \pm \frac{\pi}{2})}$$

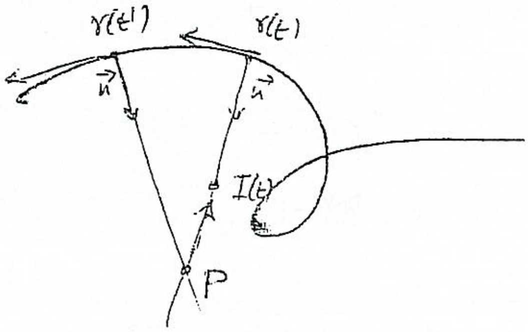
si $a < 0$

$$\gamma' = (a+i)e^{(a+i)t}$$
$$\vec{n} \propto i\gamma' = (ai - 1)e^{(a+i)t} = (ai-1)e^{at} e^{it}$$
$$\|i\gamma'\| = e^{at}\|ai - 1\| = e^{at}\sqrt{a^2+1}$$
$$\Rightarrow \vec{n} = \pm \frac{ai-1}{\sqrt{a^2+1}} e^{it}$$
$$\alpha(t) = e^{at}e^{it} + \cancel{\sqrt{a^2+1}} \cdot e^{at} \cdot \frac{ai-1}{\cancel{\sqrt{a^2+1}}} e^{it} = (1 + ai - 1)e^{at}e^{it} = a i e^{at} e^{it}$$
$$= a e^{at} e^{i(t + \frac{\pi}{2})}$$

(3) Ex

5) M.q. si $\vec{d(t)} = \gamma(t) + a\,\vec{n}(t)$, $a\in\mathbb{R}$ est la droite normale à γ en t, alors

$$d(t)\cap d(t') \xrightarrow[t'\to t]{} \alpha(t).$$



Courbe param. par longueur d'arc s,

Soit $P := d(s)\cap d(s')$. Alors:

$$\langle \overrightarrow{P\gamma(s)}, \gamma'(s)\rangle = 0$$
$$\langle \overrightarrow{P\gamma(s')}, \gamma'(s')\rangle = 0$$

Pour $s'\to s$, considérons les développements limités:

$$\gamma(s') = \gamma(s) + (s'-s)\,\gamma'(s) + o((s'-s)^2)$$
$$\gamma'(s') = \gamma'(s) + (s'-s)\,\gamma''(s) + o((s'-s)^2)$$

Alors:

$$\langle \overrightarrow{P\gamma(s')}, \gamma'(s')\rangle = \langle \overrightarrow{P\gamma(s)} + (s'-s)\gamma'(s) + o((s'-s)^2), \gamma'(s) + (s'-s)\gamma''(s) + o((s'-s)^2)\rangle$$

$$= \underbrace{\langle \overrightarrow{P\gamma(s)}, \gamma'(s)\rangle}_{0} + (s'-s)\underbrace{\langle \gamma'(s), \gamma'(s)\rangle}_{1} + (s'-s)\langle \overrightarrow{P\gamma(s)}, \gamma''(s)\rangle + o((s'-s)^2)$$

$$= (s'-s)\left[1 + \langle \overrightarrow{P\gamma(s)}, \gamma''(s)\rangle\right] + o((s'-s)^2) = 0$$

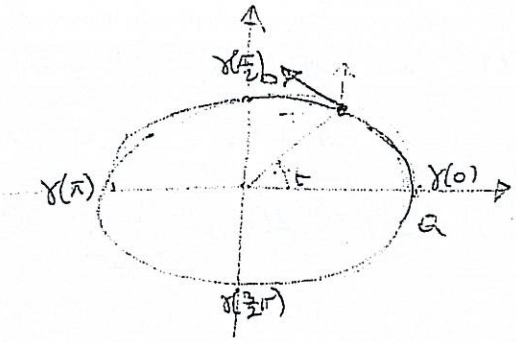
Donc $1 + \langle \overrightarrow{P\gamma(s)}, \gamma''(s)\rangle = o(s'-s)$

Puisque $P\in d(s) \,/\!/\, \gamma''(s)$ et $\overrightarrow{P\gamma(s)}$ est orienté à l'envers de $\gamma''(s)$, on a:

$$\langle \overrightarrow{P\gamma(s)}, \gamma''(s)\rangle = -|\overrightarrow{P\gamma(s)}|\,|\gamma''(s)| = -1 + o(s'-s)$$

d'où $$|\overrightarrow{P\gamma(s)}| = \frac{1}{|\gamma''(s)|} + o(s'-s) \xrightarrow[s'\to s]{} \frac{1}{|\gamma''(s)|} = \rho(s).$$

7) Developpée de l'ellipse



ellipse : $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\gamma'(t) = (-a\sin t, b\cos t) \qquad |\gamma'| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

$$\gamma''(t) = (-a\cos t, -b\sin t) = -\gamma(t)$$

$$k(t) = \frac{|\gamma' \wedge \gamma''|}{|\gamma'|^3} = \frac{|ab\sin^2 t + ab\cos^2 t|}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

$$\vec{n} \propto (-b\cos t, -a\sin t)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}(-b\cos t, -a\sin t)$$

développée : $\alpha(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)}\vec{n}(t)$

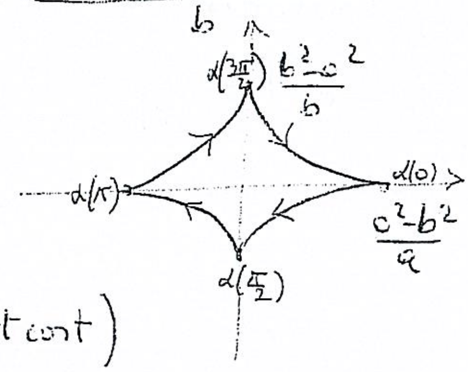
$$\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t) + \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab.(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}}(-b\cos t, -a\sin t)$$

$$= \left(a\cos t - \frac{(a^2\overset{(1-\cos^2 t)}{\sin^2 t} + b^2\cos^2 t)}{a}\cos t,\ b\sin t - \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\overset{(1-\sin^2 t)}{\cos^2 t})}{b}\sin t\right)$$

$$= \left(\frac{(a^2 - a^2 + a^2\cos^2 t - b^2\cos^2 t)}{a}\cos t,\ \frac{b^2 - a^2\sin^2 t - b^2 + b^2\sin^2 t}{b}\sin t\right)$$

$$= \left(\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,\ \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t\right)$$

$$= (a^2-b^2)\left(\frac{1}{a}\cos^3 t, -\frac{1}{b}\sin^3 t\right)$$



points singuliers :

$$\alpha'(t) = \left(-3\frac{a^2-b^2}{a}\cos^2 t\sin t,\ 3\frac{b^2-a^2}{b}\sin^2 t\cos t\right)$$

$$\alpha'(t) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2 t\sin t = 0\\ \sin^2 t\cos t = 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin t = 0 \text{ ou } \cos t = 0 \Leftrightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$$

Donc aux sommets de l'ellipse $\alpha(t)$ est singulière

N.B. $k'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$.

3) Developpée du cycloïde

cycloïde : $\gamma(t) = \left(a(t-\sin t), a(1-\cos t)\right) \quad a>0$

$\gamma'(t) = \left(a(1-\cos t), a\sin t\right) \qquad \gamma''(t) = a(\sin t, \cos t)$

$k(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos t}} \qquad \rho(t) = 2\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos t}$

$\vec{n} \propto \cancel{a}(-\sin t, 1-\cos t) = v$

$|v| = \sqrt{\sin^2 t + (1-\cos t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + 1 - 2\cos t + \cos^2 t} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}$

$\Rightarrow \quad \vec{n} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2(1-\cos t)}}(-\sin t, 1-\cos t) \quad , \langle \vec{n}, \gamma'' \rangle > 0 \Rightarrow \vec{n} = \dfrac{-1}{\sqrt{2(1-\cos t)}}(-\sin t, \cancel{\cos t})$.

$\langle \vec{n}, \gamma'' \rangle = c\cdot(-\sin^2 t + \cos t - \cos^2 t) = c(\cos t - 1) \Rightarrow c<0$

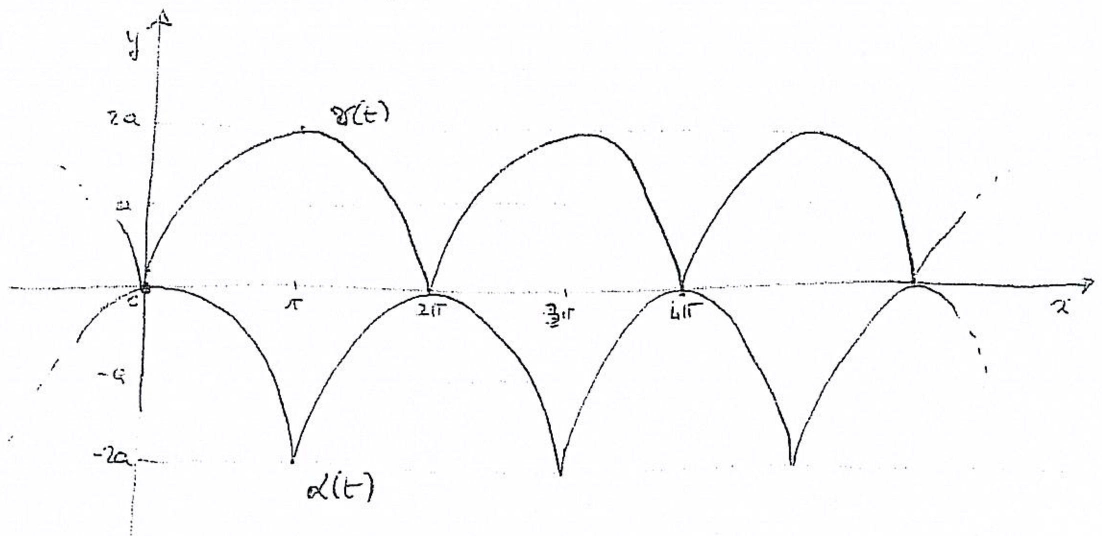
développée : $\alpha(t) = \gamma(t) + \rho(t)\vec{n}(t)$

$= \left(a(t-\sin t), a(1-\cos t)\right) - \dfrac{2\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}(-\sin t, 1-\cos t)$

$= \left(a(t-\sin t + 2\sin t), a(1-\cos t - 2 + 2\cos t)\right)$

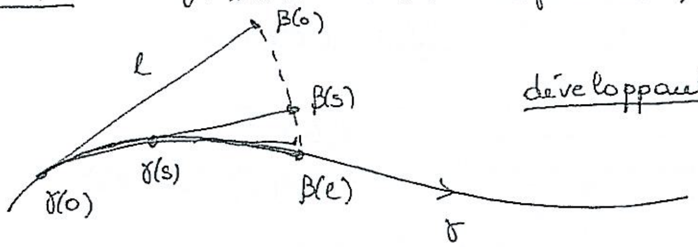
$= a\left(t + \sin t, -1 + \cos t\right) = a\left(t + \sin t, \cos t - 1\right)$

$\Rightarrow \alpha(t)$ est un cycloïde :



Exo 14

~~Exercice 11~~ $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ régulière, $\|\gamma'(s)\| = 1 \quad \forall s \in I$.



développante β de γ

1. Écrire la représentation paramétrique de la développante.

Pour $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$, fixé et pour tout $s \in [0, \ell]$ on a :

$$\beta(s) = \gamma(s) + (\ell - s)\,\gamma'(s).$$

2. M.q. β est régulière si k_γ ne s'annulle pas.

$$\beta'(s) = \gamma'(s) - \gamma'(s) + (\ell - s)\,\gamma''(s) = (\ell - s)\cdot k_\gamma(s)\cdot \vec{N}_\gamma(s)$$

pour tout $s < \ell$ on a $\beta'(s) = 0 \iff k_\gamma(s) = 0$, et $\beta'(\ell) = 0$.

On a donc : $\beta'(s) \neq 0 \iff s \neq \ell$ et $k_\gamma(s) \neq 0$.

3. M.q. la normale à β en $\beta(s)$ est la tangente à γ en $\gamma(s)$.

Il faut entendre ici : "la direction normale" et "la direction tangente".

On utilise le système de Frenet pour β et pour γ ; pour $s < \ell$:

$$\vec{T}_\beta(s) := \frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|} = \frac{(\ell-s)\,k_\gamma(s)\cdot\vec{N}_\gamma(s)}{(\ell-s)\,k_\gamma(s)} = \vec{N}_\gamma(s)$$

$$\vec{N}_\beta(s) := \frac{\vec{T}_\beta'(s)}{\|\vec{T}_\beta'(s)\|} = \frac{\vec{N}_\gamma'(s)}{\|N_\gamma'(s)\|} = -\frac{k_\gamma(s)\cdot\vec{T}_\gamma(s)}{k_\gamma(s)} = -\vec{T}_\gamma(s)$$

donc la direction normale à β en $\beta(s)$ = dir. tangente à γ en $\gamma(s)$.

4. Déterminer la courbure et le centre de courbure de β en s.

γ est paramétrée par longueur d'arc, mais β non :

$$k_\beta(s) = \frac{\|\beta'(s)\wedge\beta''(s)\|}{\|\beta'(s)\|^3} \quad \text{où :}$$

$$\beta'(s) = (\ell-s)\,\gamma''(s) \implies \|\beta'(s)\| = (\ell-s)\,\|\gamma''(s)\| = (\ell-s)\,k_\gamma(s)$$

$$\beta''(s) = -\gamma''(s) + (\ell-s)\,\gamma'''(s)$$

donc $\|\beta'(s)\wedge\beta''(s)\| = \| -(\ell-s)\underbrace{\gamma''(s)\wedge\gamma''(s)}_{=0} + (\ell-s)^2\,\gamma''(s)\wedge\gamma'''(s)\| = (\ell-s)^2\,\|\gamma''(s)\wedge\gamma'''(s)\|$

$$\gamma'(s) = \vec{T}_\gamma(s),\quad \gamma''(s) = k_\gamma(s)\cdot\vec{N}_\gamma(s) \implies \gamma'''(s) = k_\gamma'(s)\cdot\vec{N}_\gamma(s) + k_\gamma(s)\cdot\underbrace{\vec{N}_\gamma'(s)}_{= -k_\gamma(s)\cdot T_\gamma(s)}$$

donc

$$\|\gamma''(s)\wedge\gamma'''(s)\| = \|k_\gamma\cdot k_\gamma'\cdot\underbrace{N_\gamma\wedge N_\gamma}_{=0} - k_\gamma^3\cdot N_\gamma\wedge T_\gamma\| = k_\gamma^3(s)\,\underbrace{\|-N_\gamma\wedge T_\gamma\|}_{=1} = k_\gamma^3(s)$$

$$\implies k_\beta(s) = \frac{(\ell-s)^2\cdot k_\gamma^3(s)}{(\ell-s)^3\cdot k_\gamma^3(s)} = \frac{1}{\ell-s}.$$

Suite Ex. 11 4.

Pour trouver le centre de courbure de β en $\beta(s)$ (c'est-à-dire la développée α_β de β) on calcule $R_\beta(s) = \frac{1}{k_\beta(s)} = \ell - s$ et on a:

$$\alpha_\beta(s) = \beta(s) + R_\beta(s)\cdot \vec{N}_\beta(s) = \gamma(s) + (\ell-s)\,\gamma'(s) - (\ell-s)\,\gamma'(s) = \gamma(s).$$

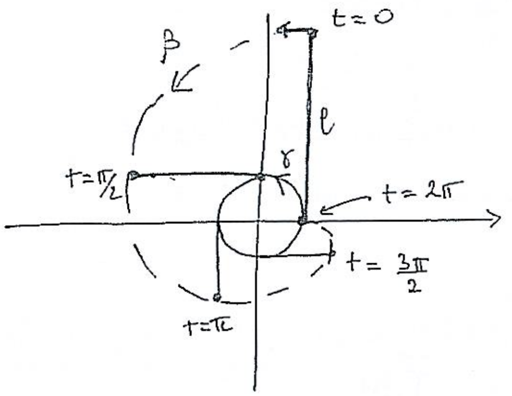
Donc la développée de β est égale à γ.

5. Dessiner la développante du cercle.

Cercle : $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ déjà param. par longueur d'arc, car $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ et $\|\gamma'(t)\| = 1$ $\forall t$. Supposons $t \in [0, 2\pi]$.

Développante : $\beta(t) = \gamma(t) + (\ell - t)\,\gamma'(t) = \big(\cos t + (\ell-t)\sin t,\ \sin t + (\ell - t)\cos t\big)$.

Dessin pour $\ell = 2\pi$:



$\ell = 2\pi \Rightarrow$ $\beta(0) = (1, \ell) = (1, 2\pi)$

$\beta(\pi/2) = (\frac{\pi}{2} - \ell, 1) = (-\frac{3\pi}{2}, 1)$

$\beta(\pi) = (-1, \pi - \ell) = (-1, -\pi)$

$\beta(2\pi) = (1, \ell - 2\pi) = (1, 0)$

et aussi $\beta'(2\pi) = \underbrace{(\ell - 2\pi)}_{=0}\cdot\gamma''(2\pi) \perp \gamma'(2\pi)$

$\beta'(0) = \underbrace{\ell}_{=2\pi}\cdot\gamma''(0) \perp \gamma'(0)$!

6. Quelle est la forme de β si le fil traverse un point ~~singulier~~ d'inflexion de γ?

γ a un point d'inflexion en s_0 si les premières deux dérivées non nulles de γ en s_0 sont $\gamma^{(p)}(s_0)$ et $\gamma^{(q)}(s_0)$ avec p impair et q impair aussi.

Calculons les dérivées de β :

$$\beta(s) = \gamma(s) + (\ell - s)\,\gamma'(s)$$
$$\beta'(s) = \gamma'(s) - \gamma'(s) + (\ell-s)\,\gamma''(s) = (\ell - s)\,\gamma''(s)$$
$$\beta''(s) = -\gamma''(s) + (\ell - s)\,\gamma'''(s)$$
$$\beta'''(s) = -2\gamma'''(s) + (\ell - s)\,\gamma^{(4)}(s)$$

etc, et en général:

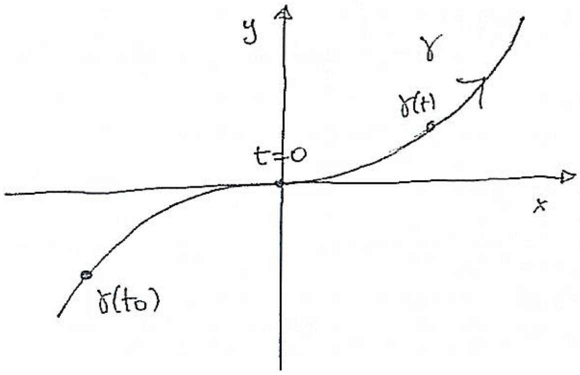
$$\beta^{(n)}(s) = -(n-1)\,\gamma^{(n)}(s) + (\ell - s)\,\gamma^{(n+1)}(s).$$

Puisque γ est régulière en s_0, on a $\gamma'(s_0) \neq 0$, donc $p = 1$.
Puisque s_0 est un point d'inflexion, on a q impair > 1, donc $q \geq 3$.
Alors $\gamma''(s_0) = 0$ et donc $\beta'(s_0) = 0$, i.e. β est singulière en s_0.

La première dérivée non nulle de β en s_0 est donc $\beta''(s_0)$ si $q = 3$ ou bien $\beta^{(4)}(s_0)$ si $q = 5$, i.e. $\beta^{(q-1)}(s_0)$, où $q-1$ est pair.
Donc $\beta(s_0)$ est un point cuspidal.

Suite Ex. 11, 6.

Dessiner la développante de la courbe $\gamma(t) = (t, t^3)$.



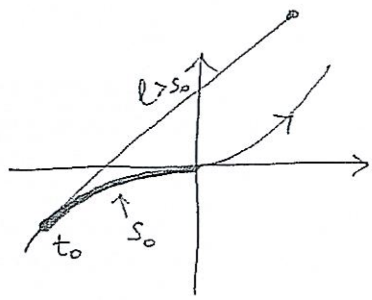
La courbe γ a un point d'inflexion en $t=0$.
Choisissons alors un point de départ $t_0 < 0$ et un $t > 0$ pour traverser l'inflexion.

Cette courbe n'est pas paramétrée par longueur d'arc, car $\gamma'(t) = (1, 3t^2)$ a longueur $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+9t^4} = 1 \Leftrightarrow t=0$.
La paramétrisation de sa développante β doit donc être modifiée :

$$\beta(t) = \gamma(t) + (\ell - s(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|},$$

où $s(t)$ est la longueur de l'arc entre t_0 et t :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du = \underbrace{\int_{t_0}^{0} \sqrt{1+9u^4}\, du}_{s_0} + \int_0^t \sqrt{1+9u^4}\, du$$



Supposons que la longueur de l'arc entre t_0 et 0 soit s_0. Pour traverser le point d'inflexion on suppose alors que $\ell > s_0$.

Ensuite choisissons $t > 0$ proche de 0, on a alors :

$$\sqrt{1+9u^4} = (1+9u^4)^{\frac{1}{2}} \underset{u \to 0}{\sim} 1 + \frac{9}{2}u^4 + \mathcal{O}(u^8)$$

donc

$$s(t) = s_0 + \int_0^t \left(1 + \frac{9}{2}u^4 + \mathcal{O}(u^8)\right) du = s_0 + t + \frac{9}{10}t^5 + \mathcal{O}(t^9)$$

$$\frac{\ell - s(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\ell - s_0 - t - \frac{9}{10}t^5 + \mathcal{O}(t^9)}{1 + \frac{9}{2}t^4 + \mathcal{O}(t^8)} = \left((\ell - s_0) - t - \frac{9}{10}t^5 + \mathcal{O}(t^9)\right)\left(1 - \frac{9}{2}t^4 + \mathcal{O}(t^8)\right)$$

$$= (\ell - s_0) - t - \frac{9}{2}(\ell - s_0)t^4 + \mathcal{O}(t^5)$$

La développante de $\gamma(t) = (t, t^3)$ est donc

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} + \left[(\ell-s_0)\cancel{t} - t - \frac{9}{2}(\ell-s_0)t^4 + O(t^5)\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{t} + (\ell-s_0) \cancel{-t} - \frac{9}{2}(\ell-s_0)t^4 + O(t^5) \\ t^3 + 3(\ell-s_0)t^2 - 3t^3 + O(t^5) \end{pmatrix}$$

$$= \left((\ell-s_0) - \frac{9}{2}(\ell-s_0)t^4 + O(t^5) \,,\; 3(\ell-s_0)t^2 - 2t^3 + O(t^5) \right).$$

On a alors :

$\beta'(t) = \left(-18(\ell-s_0)t^3 + O(t^4) \,,\; 6(\ell-s_0)t - 6t^2 + O(t^4)\right)$,

donc $\beta'(0) = (0,0)$, β est singulière en $t=0$.

$\beta''(t) = \left(-54(\ell-s_0)t^2 + O(t^3) \,,\; 6(\ell-s_0) - 12t + O(t^3)\right)$

donc $\beta''(0) = (0, 6(\ell-s_0)) \neq (0,0)$ → première dérivée $\beta^{(p)}(0)$ non nulle pour $p=2$

$\beta'''(t) = \left(-108(\ell-s_0)t + O(t^2) \,,\; -12 + O(t^2)\right)$

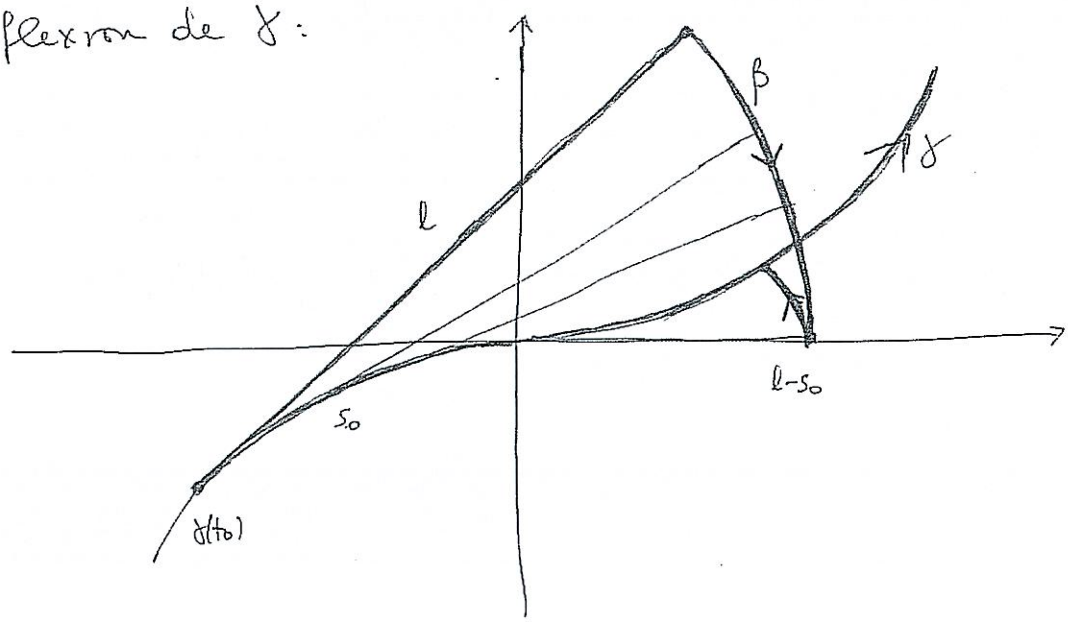
donc $\beta'''(0) = (0,-12) \neq (0,0)$ mais $\beta'''(0) \,//\, \beta''(0)$

donc il n'est pas lin. indép.

$\beta^{(4)}(t) = \left(-108(\ell-s_0) + O(t) \,,\; O(t)\right)$

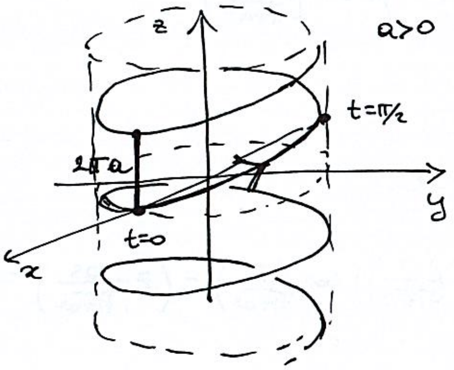
donc $\beta^{(4)}(0) = (-108(\ell-s_0), 0) \neq (0,0)$ et $\beta^{(4)}(0) \perp \beta''(0)$!

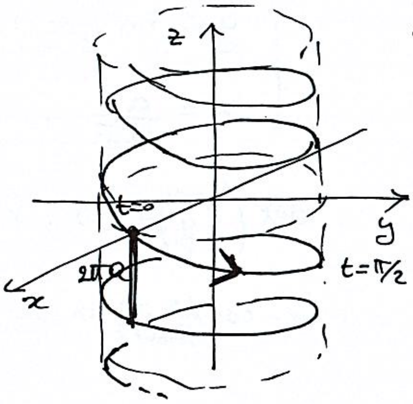
La développante de γ a donc un point de rebroussement de 2ème espèce dans le point d'inflexion de γ :



Exo 15 hélice circulaire $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t, at) \quad a \neq 0$

Rem : $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ \frac{y}{x} = \tan(z/a) \end{cases}$ en particulier $\operatorname{supp}(\gamma) \subset$ cylindre $x^2+y^2=1$





1. Abscisse curviligne :

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, a) \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + a^2} = \sqrt{1+a^2} \neq 0 \ \forall t \Rightarrow \gamma$ rég.

$s(t) = \pm \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du = \pm \sqrt{1+a^2} \int_{t_0}^{t} du = \pm\left(\sqrt{1+a^2}\, t - s_0\right) \Rightarrow$ suffit $s = \sqrt{1+a^2}\, t$.

Réparamétrage : $t = \frac{s}{\sqrt{1+a^2}} \Rightarrow \tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), \frac{as}{\sqrt{1+a^2}}\right)$.

2. Courbure : (1) $k_\gamma(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$ ou bien (2) $k_{\tilde{\gamma}}(s) = \|\tilde{\gamma}''(s)\|$

(2) $\tilde{\gamma}'(s) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), \cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), a\right)$

$\tilde{\gamma}''(s) = -\frac{1}{(1+a^2)}\left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), 0\right) \Rightarrow k_{\tilde{\gamma}}(s) = \|\tilde{\gamma}''(s)\| = \frac{1}{1+a^2}$.

Torsion : (1) $\tau_\gamma(t) = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}$ (même chose pour $\tau_{\tilde{\gamma}}(s)$)

ou bien (2) via Frénet : $N_\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\|\, \tau_\gamma(t)\, B_\gamma(t)$ ou $B_\gamma'(t) = -\|\gamma'(t)\|\, \tau_\gamma(t)\, N_\gamma(t)$

ou encore $N_{\tilde{\gamma}}'(s) = \tau_{\tilde{\gamma}}(s)\, B_{\tilde{\gamma}}(s)$ ou $B_{\tilde{\gamma}}'(s) = -\tau_{\tilde{\gamma}}(s)\, N_{\tilde{\gamma}}(s)$

Calculs de (2) en abscisse curviligne :

$T_{\tilde{\gamma}}(s) = \tilde{\gamma}'(s) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), \cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), a\right)$

$N_{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{\tilde{\gamma}''(s)}{\|\tilde{\gamma}''(s)\|} = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), 0\right)$

$B_{\tilde{\gamma}}(s) = T_{\tilde{\gamma}}(s) \wedge N_{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), -a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), 1\right)$

$B_{\tilde{\gamma}}'(s) = \frac{a}{(1+a^2)}\left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), 0\right) = -\frac{a}{1+a^2} N_{\tilde{\gamma}}(s) \Rightarrow \tau_{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{a}{1+a^2}$.

2)

3. Plan osculateur : $\pi_{osc}(s) = \tilde\gamma(s) + Vect(\tilde\gamma'(s), \tilde\gamma''(s))$

$$= \{ \tilde\gamma(s) + \lambda \tilde\gamma'(s) + \mu \tilde\gamma''(s) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

éq. paramétrique :
$$\begin{cases} x = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right) - \lambda \sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right) + \mu \cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right) \\ y = \sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right) + \lambda \cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right) + \mu \sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right) \\ z = \frac{as}{\sqrt{1+a^2}} + \lambda a \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

éq. cartésienne : $\det\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \tilde\gamma(s), \tilde\gamma'(s), \tilde\gamma''(s) \right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad -a\left(x - \cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right)\right) \sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right) + a\left(y - \sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right)\right)\cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right) - \left(z - \frac{as}{\sqrt{1+a^2}}\right) = 0.$$

4. Mq. $\forall s$, la droite passant par $\tilde\gamma(s)$ parallèle à $N_{\tilde\gamma}(s)$ coupe $\vec{Oz}$ sous un angle $= \pi/2$.

droite $= \{ P_s(\lambda) = \tilde\gamma(s) + \lambda N_{\tilde\gamma}(s) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

$$P_s(\lambda) = \left((1-\lambda)\cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), (1-\lambda)\sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), \frac{as}{\sqrt{1+a^2}} \right)$$

alors : - la droite coupe $\vec{Oz}$ car pour $\lambda = 1$ on a $P_s(1) = \left(0, 0, \frac{as}{\sqrt{1+a^2}}\right) \in \vec{Oz}$

- l'angle de coupure est $\frac{\pi}{2}$ car le vecteur directeur de la droite ~~est~~ est $N_{\tilde\gamma}(s)$ et $\left\langle N_{\tilde\gamma}(s), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$.

5. Mq. $\forall s$, la droite tangente à $\tilde\gamma$ en $\tilde\gamma(s)$ forme un angle constant avec $\vec{Oz}$.

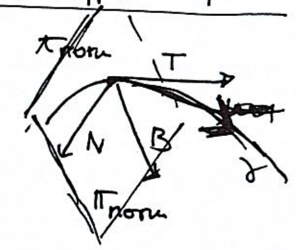
Ceci est vrai ssi $\langle \tilde\gamma'(s), \vec{Oz} \rangle = $ const.

On a :
$$\langle \tilde\gamma'(s), \vec{Oz} \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} -\sin(s/\sqrt{1+a^2}) \\ \cos(s/\sqrt{1+a^2}) \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \quad \text{constant}.$$

Geom. M1 - Fiche ~~TD3~~ TD1 (7

Exo 16 γ birégulière (rég. et $k \neq 0$)

1. M.q. si tous les plans normaux passent par un même point, alors supp $\gamma \subset$ sphère.



Plan normal à γ en t : $\pi_{norm,\gamma}(t) = \gamma(t) + \mathrm{Vect}\left(N_\gamma(t), B_\gamma(t)\right)$

Par translation, supposons que le point commun à tous les π_{norm} soit l'origine O.

Alors le vecteur $\overrightarrow{O\gamma(t)} = \gamma(t) \in \pi_{norm,\gamma}(t)$, i.e. $\gamma(t) = a(t)N_\gamma(t) + b(t)B_\gamma(t)$.

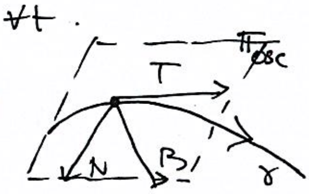
Montrons que $\gamma(t) \in$ sphère centrée en O, i.e. que $\|\gamma(t)\| =$ rayon constant, i.e. que $\|\gamma(t)\|^2 = \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle =$ constant.

En effet : $\dfrac{d}{dt}\|\gamma(t)\|^2 = 2\langle \gamma'(t), \gamma(t)\rangle = 2\langle T, aN + bB\rangle = 0$.

(On a supposé γ paramétrée par longueur d'arc, sinon $\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\| \cdot T$ et l'argument est toujours valable.).

2. M.q. si tous les plans osculateurs passent par un même point, alors γ est plane.

Puisque γ est birégulière, on a γ plane $\Leftrightarrow \tau_\gamma(t) = 0 \ \forall t$.



Plan osculateur de γ en t : $\pi_{osc,\gamma}(t) = \gamma(t) + \mathrm{Vect}\left(T_\gamma(t), N_\gamma(t)\right)$

Par translation, supposons que le point commun à tous les π_{osc} soit l'origine O.

Alors $\overrightarrow{O\gamma(t)} = \gamma(t) \in \pi_{osc,\gamma}(t)$, i.e. $\gamma(t) = a(t)T_\gamma(t) + b(t)N_\gamma(t)$.

Supposons γ paramétrée par longueur d'arc. Alors :

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (a'T + aT') + (b'N + bN') \\
&= a'T + akN + b'N + b(-kT + \tau B) \\
&= (a' - bk)T + (ak + b')N + b\tau B
\end{aligned}$$

$$\gamma'(t) = T_\gamma(t) \ \forall t \iff \begin{cases} a' - bk = 1 & (1) \\ ak + b' = 0 \quad \forall t & (2) \\ b\tau = 0 & (3) \end{cases}$$

- Si $b(t) = 0 \ \forall t$, on a $b'(t) = 0 \ \forall t \underset{k \neq 0 \forall t}{\overset{(2)}{\Longrightarrow}} a(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow \gamma(t) = 0 \ \forall t$.
  impossible : un point n'est pas birég.
- Donc la fct $b(t)$ ne peut que s'annuler en des pts isolés $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$
- Sur chaque interval $]t_i, t_{i+1}[$ on a $b \neq 0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} \tau = 0 \Rightarrow \gamma$ est plane.
- Faut alors supposer γ de classe C^3 : dans ce cas τ est continue, si τ s'annule sur les intervalles $]t_i, t_{i+1}[$ elle s'annulle partout et γ est plane.