

FICHE TD 1 - COURBES PARAMÉTRÉES

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien et de la norme associée. Caractériser les isométries de cet espace euclidien.

Exercice 2.

- On considère une courbe plane paramétrée γ de classe C^1 et régulière. Quelle est la limite des droites passant par $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$ quand t tend vers 0 ?
- On considère un angle droit $\Gamma = \{(x, 0) | x \geq 0\} \cup \{(0, y) | y \geq 0\}$ dans le plan :  Cette figure est-elle le *support* d'une courbe paramétrée ? Trouver un paramétrage C^0 . Admet-elle aussi un paramétrage C^∞ ? [Indication : utiliser la fonction $f(t) = e^{-1/t^2}$] Ce paramétrage est-il régulier au point O ? Peut-on avoir un paramétrage régulier en O ?
- On considère la **courbe cuspidale** $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Dessiner la courbe autour de $t = 0$. Est-elle régulière en $(0, 0)$? Soit Γ la partie de cette courbe décrite par $t \in [0, \infty)$. Donner un paramétrage C^1 de Γ qui soit régulier en $(0, 0)$. Montrer qu'il n'y a pas de paramétrage C^2 de Γ qui soit régulier en $(0, 0)$.
- Trouver un paramétrage de la courbe $\gamma(t) = (t^3, t^4 + t^5)$, $t \in \mathbb{R}$, qui soit régulier en $(0, 0)$.

Exercice 3. Pour les courbes suivantes, trouver les symétries, les points singuliers (qu'on étudiera à l'aide d'un développement limité), ainsi qu'une équation décrivant le support de la courbe en coordonnées cartésiennes. Enfin, dessiner chaque courbe.

- L'**astroïde** $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi[$.
- La **néphroïde** $\gamma(t) = (3 \cos t - \cos(3t), 3 \sin t - \sin(3t)) = (6 \cos t - 4 \cos^3 t, 4 \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi[$.
- La **chaînette** $\gamma(t) = (\ln t, t + \frac{1}{t})$, $t > 0$.

Exercice 4. Une **courbe polaire** est une courbe plane γ paramétrée par une fonction $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\varphi \mapsto r(\varphi)$ de classe C^1 sous la forme $\gamma(\varphi) = (r(\varphi) \cos(\varphi), r(\varphi) \sin(\varphi)) = r(\varphi)e^{i\varphi}$.

- Sous quelles conditions une courbe polaire est-elle régulière ? Quels peuvent être les points singuliers ?
- Montrer qu'une courbe plane régulière γ , évitant l'origine, admet une paramétrisation comme courbe polaire si et seulement si le vecteur vitesse γ' n'est jamais proportionnel au vecteur position γ .
- Pour quelles valeurs des paramètres réels a, b, c la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet-elle une paramétrisation polaire ? Écrire cette paramétrisation dans ces cas.
- Écrire une paramétrisation de la courbe cuspidale $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ en polaire, pour $t > 0$.
- Dessiner la courbe $r = \cos(n\varphi) + 2$ pour $n = 1, 2, 3$.
- Étudier les courbes définies par $r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$, où $p, e > 0$, selon les cas $e < 1$, $e = 1$ et $e > 1$.
- Calculer la longueur d'arc et la courbure d'une courbe polaire.
- Calculer la courbure des courbes définies par $r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$, où $p, e > 0$, selon les cas $e < 1$, $e = 1$ et $e > 1$.

Exercice 5. Soit $\{D_t, t \in I\}$ une famille de droites du plan. L'**enveloppe de la famille** $\{D_t\}$ est une courbe $\gamma(t)$, $t \in I$ dont les droites D_t sont les tangentes.

- Supposons que les droites D_t soient décrites par l'équation $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$, où a , b et c sont des fonctions de classe C^1 . Montrer que l'enveloppe $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ vérifie le système

$$a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0$$

$$a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0.$$

En déduire une représentation paramétrique de $\gamma(t)$.

- Exemple : on considère un segment de longueur L dont les extrémités glissent le long des côtés d'un angle droit (une échelle posée contre un mur). L'**astroïde** est la frontière de la zone balayée par le segment. Déterminer l'astroïde comme courbe paramétrée et comme graphe d'une fonction.

Exercice 6 (Facultatif). On considère une famille de courbes du plan paramétrée par $t \in \mathbb{R}$ et définie par $\mathcal{C}_t := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, F_t(x, y) := F(x, y, t) = 0\}$. L'enveloppe de la famille $\{\mathcal{C}_t\}$, ou **contour apparent**, est l'ensemble E des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels qu'il existe un t avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0 \\ F(x, y, t) = 0 \end{cases}$$

On suppose ici que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la courbe $\mathcal{C}_t$ admet une paramétrisation régulière $u \mapsto \alpha_t(u) := \alpha(t, u)$, avec $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

- 1) Montrer que, pour tout $(t, u) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial \alpha_t}{\partial u}(u)$ est orthogonal à $\nabla F_t(\alpha_t(u))$.
- 2) Montrer que, pour tout (t, u) , $\alpha_t(u) \in E$ si et seulement si

$$\det \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}(t, u), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, u) \right) = 0 .$$

- 3) **Enveloppe de cercle ou Fronts.** A partir des résultats précédents, déterminer le "front" ou enveloppe des cercles de rayon 1 centrés sur une parabole d'équation paramétrique $t \mapsto (t, t^2)$. Etudier cette enveloppe et donner son interprétation géométrique.
- 4) **Caustiques dans une tasse de café.** Un faisceau de rayons lumineux (parallèles) est réfléchi sur une paroi circulaire, quelle est l'enveloppe des droites réfléchies ?

Exercice 7. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ une courbe plane régulière paramétrée par le paramètre t qui n'est pas l'abscisse curviligne s . En utilisant la reparamétrisation $t = t(s)$, montrer que la courbure de γ vaut

$$k(t) = \frac{\sqrt{\|\gamma'(t)\|^2 \cdot \|\gamma''(t)\|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2}}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

N.B. Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe de l'espace, on a aussi $k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$.

Exercice 8. Quelles sont les courbes planes régulières à courbure constante ?

Exercice 9. La **spirale logarithmique** est la courbe $\gamma(t) = (e^{at} \cos t, e^{at} \sin t) = e^{(a+i)t}$, $t \in \mathbb{R}$, où $a \neq 0$.

- 1) Dessiner la spirale logarithmique.
- 2) Calculer l'abscisse curviligne et la courbure de la spirale logarithmique.
- 3) Montrer que, pour $a > 0$, on a $\gamma(t) \rightarrow (0, 0)$ quand $t \rightarrow -\infty$. Montrer que la longueur d'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t \rightarrow -\infty$.
- 4) Quelles sont les courbes planes régulières dont le rayon de courbure est proportionnel à l'arc ?
- 5) Montrer que la tangente à la spirale logarithmique fait un angle constant avec la droite joignant le point courant à l'origine. Quelles sont les courbes planes ayant cette propriété ?

Exercice 10. Une roue roule sans glisser sur une droite dans le plan vertical. La courbe tracée par un point du bord de la roue s'appelle **cycloïde**.

- 1) Dessiner la cycloïde. Donner un paramétrage de la cycloïde et déterminer ses points singuliers.
- 2) Calculer l'abscisse curviligne et la courbure de la cycloïde. Exprimer la courbure en fonction de l'abscisse curviligne. Calculer la longueur d'arc de la cycloïde qui correspond à un tour complet de la roue.
- 3) Quelle est la forme des courbes décrites par des points intérieurs (respectivement, extérieurs) de la roue ?
- 4) Etudier les points singuliers.

Exercice 11. Soit γ une courbe birégulière. On suppose que γ est située à l'intérieur (respectivement, à l'extérieur) d'un cercle C et qu'elle touche le cercle au point $p : \gamma(t_0) = p \in C$.

Montrer que le cercle osculateur de γ en p est situé à l'intérieur (respectivement, à l'extérieur) de C . [L'intérieur et l'extérieur sont traités dans le sens large.] Quelle conclusion pour le rayon de courbure en p ?

Exercice 12. Soit γ une courbe régulière, soit ρ le rayon de courbure en $\gamma(t_0) = p$ (on suppose que $\rho < \infty$). Soit C_r un cercle de rayon r qui est tangent à γ en p et situé dans le demi-plan de concavité de γ en p (le demi-plan indiqué par la normale principale de γ en p).

Montrer que pour t proche de t_0 , $\gamma(t)$ est situé à l'intérieur de C_r si $r > \rho$, et à l'extérieur de C_r si $r < \rho$.

Exercice 13 (*Facultatif*). Soit γ une courbe plane birégulière. La **développée** de γ est le lieu des centres de courbure de γ .

- 1) Ecrire la représentation paramétrique $\alpha(t) = \dots$ de la développée.
- 2) Montrer que la développée est régulière si la dérivée de la courbure de γ ne s'annule pas.
- 3) Montrer que la tangente à α en $\alpha(t)$ est la normale à γ en $\gamma(t)$. [La développée est l'enveloppe des droites normales de γ .]
- 4) Montrer que si γ est de classe C^3 et $\rho' \neq 0$ entre t et t' , la longueur d'arc de la développée entre t et t' est égale à $|\rho(t) - \rho(t')|$.
- 5) Montrer que quand t' tend vers t , le point d'intersection de la normale à γ en $\gamma(t)$ avec la normale à γ en $\gamma(t')$ tend vers $\alpha(t)$.
- 6) Déterminer la développée de la spirale logarithmique.
- 7) Dessiner la développée de l'ellipse. Que se passe-t-il aux sommets de l'ellipse?
- 8) Montrer que la développée d'un cycloïde est un cycloïde.

Exercice 14 (*Facultatif*). Soit γ une courbe plane régulière paramétrée par son abscisse curviligne. La **développante** de γ s'obtient de façon suivante. On prend un fil de longueur ℓ , on fixe une extrémité du fil au point $\gamma(0)$ et on laisse le fil suivre la courbe γ jusqu'en un point $\gamma(s)$, $0 \leq s < \ell$, en tenant l'autre extrémité $\beta(s)$ sous tension : la portion de fil d'extrémités $\gamma(s)$ et $\beta(s)$ est un segment de droite tangent à γ en $\gamma(s)$. La développante est la courbe décrite par le point $\beta(s)$.

- 1) Ecrire la représentation paramétrique de la développante.
- 2) Montrer que la développante est régulière si la courbure de γ ne s'annule pas.
- 3) Montrer que la normale à β en $\beta(s)$ est la tangente à γ en $\gamma(s)$.
- 4) Déterminer la courbure et le centre de courbure de la développante en s . En sachant que la développée d'une courbe est le lieu des centres de courbure, quelle est la développée de β ?
- 5) Dessiner la développante du cercle.
- 6) Quelle est la forme de la développante si le fil passe par un point d'inflexion sur γ ? Dessiner la développante de la courbe $\gamma(t) = (t, t^3)$.

Exercice 15. L'**hélice circulaire** est la courbe $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, at)$, où $a \neq 0$.

- 1) Déterminer l'abscisse curviligne.
- 2) Déterminer la courbure et la torsion.
- 3) Déterminer son plan osculateur.
- 4) Montrer que, pour tout t , la droite passant par $\gamma(t)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(t)$ coupe l'axe Oz sous un angle égal à $\frac{\pi}{2}$.
- 5) Montrer que la tangente en tout point fait avec l'axe Oz un angle constant.

Exercice 16 (Partiel 2009). Soit γ une courbe birégulière de $\mathbb{R}^3$.

- 1) Montrer que si tous les plans normaux de γ passent par un point fixe, alors γ est située sur une sphère.
- 2) Montrer que si tous les plans osculateurs de γ passent par un point fixe, alors γ est une courbe plane.