

FICHE TD 2 - AIRE, GREEN-RIEMANN

Exercice 1. À l'aide de la formule de Green-Riemann, montrer que l'aire d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ vaut

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx dy = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx.$$

Exercice 2. Soit D le disque unité de $\mathbb{R}^2$ et $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

- (1) Calculer $I = \int_{\partial D} xy^2 dx + 2xy dy$ et $J = \int_{\partial K} xy^2 dx + 2xy dy$ directement.
- (2) Calculer I et J en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 3. Soit D la couronne circulaire donnée par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$$

où $0 < a < b$.

- (1) Calculer l'aire de D en utilisant la formule de Green-Riemann.
- (2) Calculer l'intégrale double $I = \int_D 2xy dx dy$ en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 4. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq (1-x)^2\}.$$

- (1) Calculer l'aire de D en utilisant la formule de Green-Riemann.
- (2) Calculer l'intégrale double $I = \int_D (x^2 + y^2) dx dy$.
- (3) Calculer l'intégrale curviligne $J = \int_{\partial D^+} (2y - y^3) dx + (2x + x^3) dy$.
- (4) Comparer I et J . Pouvaient-on prévoir ce résultat ?

Exercice 5. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par les paraboles

$$\mathcal{P}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}.$$

- (1) Calculer l'aire de D par un calcul direct et en utilisant la formule de Green-Riemann.
- (2) Considérons le champs de vecteurs $X(x, y) = (2x + 3y^2, 6xy + \cos y)$ sur $\mathbb{R}^2$ et les deux points $A = (0, 0)$ et $B = (1, 1)$. Calculer la circulation de X le long du circuit formé par la portion de $\mathcal{P}_1$ allant de A vers B , puis celle de $\mathcal{P}_2$ allant de B vers A .

Exercice 6. La *cardioïde* est la courbe plane définie en coordonnées polaires par

$$\rho(\varphi) = 1 + \cos \varphi \quad (\text{ou bien } \rho(\varphi) = 1 + \sin \varphi, \text{ etc}), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Calculer la longueur de la cardioïde et l'aire du domaine qu'elle entoure. Vérifier l'inégalité isopérimétrique.

Exercice 7. La *cycloïde* est la courbe plane paramétrée, pour tout $a \in \mathbb{R}, a > 0$, par

$$\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Calculer l'aire du domaine D entouré par l'arche de cycloïde correspondant à $t \in [0, 2\pi]$ et par l'axe des abscisses. Calculer la longueur du bord ∂D et vérifier l'inégalité isopérimétrique.

Exercice 8. La *lemniscate de Bernoulli* est la courbe plane donnée en coordonnées polaires par

$$\rho(\theta) = \sqrt{a \cos(2\theta)}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right],$$

avec $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Dessiner la lemniscate et calculer l'aire du domaine qu'elle entoure.