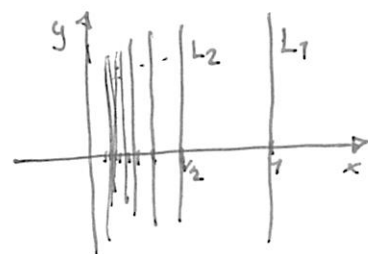


Exo 1  $L_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{1}{n} \} \quad n \in \mathbb{N}^*$ ,  $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} L_n$

(1)  $M$  est-il une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ ?

OUI, preuve: Posons  $I_1 = ]\frac{1}{2}, 2[$ ,  $I_n = ]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[$  ouverts de  $\mathbb{R}$ .



$\forall (a, b) \in M$ ,  $\exists ! n$  tq  $(a, b) \in L_n$  i.e.  $a = \frac{1}{n}$ .

Posons  $U = I_n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$  ouvert et  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = (y, x - \frac{1}{n})$ .

Alors  $\varphi$  est un difféo  $C^\infty$  (car linéaire) sur  $\varphi(U) = \mathbb{R} \times (I_n - \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}^2$  ouvert,

où  $I_n - \frac{1}{n} = ]\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}[$ .

On a  $M \cap U = L_n$  et  $\varphi(M \cap U) = \varphi(L_n) = \mathbb{R} \times \{0\} = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ ,

donc  $M$  est une sous-variété de dim. 1 de  $\mathbb{R}^2$ .

(2)  $M_0 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \}$  et  $M' = M \cup M_0$ .  $M'$  est-il une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ ?

NON, car pour  $(0, 0) \in M_0 \subset M'$ , s'il existe  $U$  voisinage ouvert de  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^2$

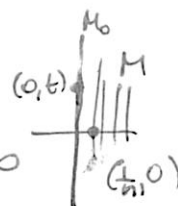
et  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  difféo sur  $\varphi(U)$  t.q.  $\varphi(M' \cap U) = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cap \varphi(U)$ ,

et si on suppose  $\varphi(0, 0) = (0, 0)$  (ce qui est vrai à moins d'une translation,

alors: si  $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$ , on a  $\varphi_2(M' \cap U) = \{0\} \subset \mathbb{R}$ .

• Considérons  $(0, t) \in M' \cap U$  pour petit  $t$ , alors:

$$\varphi_2(0, t) = 0 \quad \forall t \text{ petit} \Rightarrow \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_2(0, 0+t) - \varphi_2(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0$$



• Considérons  $(\frac{1}{n}, 0) \in M' \cap U$  pour  $n$  grand, alors:

$$\varphi_2(\frac{1}{n}, 0) = 0 \quad \forall n \text{ grand} \Rightarrow \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_2(\frac{1}{n}, 0) - \varphi_2(0, 0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{1}{n}} = 0$$

Donc  $d\varphi(0, 0)$  n'est pas inversible, i.e.  $d\varphi_{(0,0)}$  n'est pas un iso,  
 et  $\varphi$  ne peut être un difféo.

Exo 2 (1) Exemple d'intersection de deux sous-var. de  $\mathbb{R}^3$  qui est une sous-var.:

$S_1 = \text{sphère } S^2 = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$

$S_2 = \text{cylindre } \{ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \}$

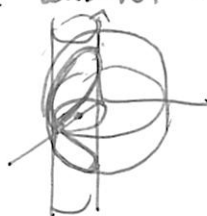


$S_1 \cap S_2 = \text{deux cercles}$

(2) Exemple d'intersection de deux sous-var. de  $\mathbb{R}^3$  qui n'est pas une sous-var.:

$S_1 = \text{sphère } S^2$

$S_2 = \text{cylindre } \{ (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \}$



$S_1 \cap S_2 = \text{courbe à huit}$

### Exo 3

(1) Pour quels  $a \in \mathbb{R}$  l'ensemble  $A_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = a\}$  est sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ ?

•  $A_a = f_a^{-1}(0)$  pour  $f_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 - y^2 - a$

donc  $A_a$  est sous-variété si 0 est une valeur régulière de  $f_a$ .

$\nabla f_a(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$  et  $(0,0) \in f_a^{-1}(0)$  ssi  $a=0$

• Donc si  $a \neq 0$ ,  $f_a$  est une submersion sur  $\mathbb{R}^2$ , donc  $f_a^{-1}(0) = A_a$  est sous-variété de dim 1

• Pour  $a=0$ , on a  $A_0 = \{x^2 - y^2 = 0\} = \{y=x\} \cup \{y=-x\}$  ~~X~~ qui n'est pas sous-variété.

(2) Pour quels  $\beta \in \mathbb{R}$  l'ensemble  $B_\beta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 = \beta\}$  est sous-variété?

•  $B_\beta = g_\beta^{-1}(0)$  pour  $g_\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^3 - y^3 - \beta$ .

donc  $B_\beta$  est sous-variété si 0 est une valeur rég. de  $g_\beta$ .

$\nabla g_\beta(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$  et  $(0,0) \in g_\beta^{-1}(0)$  ssi  $\beta=0$

• Pour  $\beta \neq 0$ ,  $g_\beta$  est submersion, donc  $B_\beta = g_\beta^{-1}(0)$  est sous-variété.

• Pour  $\beta=0$ , on a  $B = \{x^3 - y^3 = 0\} = \{y=x\}$  qui est aussi une sous-variété,

car  $B_0 = \tilde{g}_0^{-1}(0)$  pour  $\tilde{g}_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x - y$

qui est une submersion car  $\nabla \tilde{g}_0(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \forall (x,y)$ .

Exo 4 Les ensembles suivants sont-ils des sous-variétés?

(1)  $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^5 - 3y^2 - z = 0\}$

OUI, car  $S_1 = \text{graphe de } F_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto F_1(x,y) = x^5 - 3y^2 = z$ .

(2)  $S_2 = \{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5 \mid xy^2 - u = 0, x^3 + 3yz - v = 0\}$

OUI, car  $S_2 = \text{graphe de } F_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^3 + 3yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

(3)  $S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy^2 - z = 0, x + y = 0\}$

On peut voir  $S_3 = F_3^{-1}(0)$  où  $F_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} xy^2 - z \\ x + y \end{pmatrix}$

Or,  $JF_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  a rang 2  $\forall (x,y,z)$   
 $\det = 1$

donc  $F_3$  est une submersion et  $S_3 = F_3^{-1}(0)$  est une sous-variété de dim  $3-2=1$ .

Exo 5 Les sous-ensembles suivants, sont-ils des sous-variétés ?

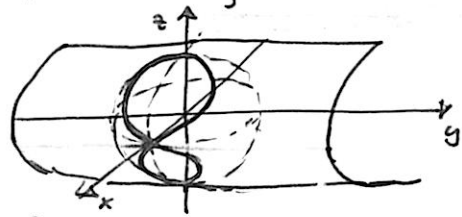
(1) Cubrique  $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 13 = 0 \}$

- $S = F^{-1}(0)$  pour  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 13$  lisse.
- $\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3yz \\ 3y^2 - 3xz \\ 3z^2 - 3xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - yz = 0 & \times x \\ y^2 - xz = 0 & \times y \\ z^2 - xy = 0 & \times z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - yz = 0 \\ y^2 - xz = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \end{cases}$  impossible sur  $S: 13$
- Donc  $F$  est une submersion en tout point de  $S \Rightarrow S$  est sous-variété de dim. 2.

(2) Fenêtre de Viriani  $C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 - x = 0 \}$

$$\Rightarrow C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 1 - z^2 \}$$

C'est l'intersection de la sphère  $S^2$  avec un cylindre parabolique.



- $C = F^{-1}((0,0))$  pour  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x + z^2 - 1 \end{pmatrix}$  lisse.

- $JF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 0 & 2z \end{pmatrix}$  quel est le rang de  $JF(x, y, z)$  ?

si  $y \neq 0$ ,  $\text{rk } JF = 2$  maximal

si  $y = 0$  et  $z \neq 0$ ,  $\text{rk } JF = 2$  maximal

si  $y = 0$  et  $z = 0$ ,  $\text{rk } JF = 1 : C \cap \{y=0, z=0\} = \{(1, 0, 0)\} \neq \emptyset$

- Puisque  $dF_{(1,0,0)}$  n'a pas rang maximal, la valeur  $(0,0) = F(1,0,0)$  n'est pas régulière pour  $F$ , donc  $F^{-1}((0,0))$  n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ .

- En effet, le point  $(1,0,0)$  est un point double de  $C$ .

Pour le voir, étudions  $C$  au voisinage de  $(1,0,0)$ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = 1 - z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 - z^2 = 1 - (1 - z^2)^2 - z^2 = z^2 - z^4 \\ x = 1 - z^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm z \sqrt{1 - z^2} \sim \pm z(1 - \frac{1}{2}z^2) \\ x = 1 - z^2 \end{cases} \quad z \rightarrow 0$$

Au voisinage de  $(1,0,0)$ , quand  $z \rightarrow 0$  et  $y \rightarrow 0$ , la courbe  $C$  est

composée de deux branches:  $\begin{cases} x = 1 - z^2 \\ y \sim z \end{cases}$  et  $\begin{cases} x = 1 - z^2 \\ y \sim -z \end{cases}$ .

Exo 6 Quel est le sous-espace maximale de l'intersection entre la sphère  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  et le cylindre  $S = \{(x, y, z) \mid (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$  qui forme une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  ?

•  $\mathbb{S}^2 \cap S = F^{-1}((0,0))$  pour  $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

•  $JF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2(x - \frac{1}{2}) & 2y & 0 \end{pmatrix}$  : quel est le rang ?

Puisque  $\begin{pmatrix} 2x \\ 2(x - \frac{1}{2}) \end{pmatrix}$  ne s'annule pas  $\forall x \in \mathbb{R}$ , prenons cette colonne avec une des deux autres :

si  $y \neq 0$ ,  $\text{rk } JF = 2$  max.

si  $y = 0$ ,  $z \neq 0$  et  $x \neq \frac{1}{2}$ ,  $\text{rk } JF = 2$  max.

si  $y = 0$ ,  $z \neq 0$  et  $x = \frac{1}{2}$ ,  $\text{rk } JF = 1$

si  $y = 0$  et  $z = 0$ ,  $\text{rk } JF = 1$ .

• En somme :  $\text{rk } JF(x, y, z) = 2 \iff (x, y, z) \notin \underbrace{\{(\frac{1}{2}, 0, z) \mid z \neq 0\}}_A \cup \underbrace{\{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}}_B$

• On a :  $F(\frac{1}{2}, 0, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + z^2 - 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \forall z$ , donc  $A \not\subset F^{-1}((0,0))$

$$F(x, 0, 0) = \begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ (\pm 1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \iff x = 1$$

donc  $(1, 0, 0) \in B \cap F^{-1}((0,0))$  !

• Donc  $F^{-1}((0,0)) \setminus \{(1, 0, 0)\}$  est une sous-variété (de dim.  $3 - 2 = 1$ ) de  $\mathbb{R}^3$ .

• Le point  $(1, 0, 0)$  est double (cf. Exo 5), donc la sous-variété maximale de  $\mathbb{S}^2 \cap S$  est  $F^{-1}((0,0)) \setminus \{(1, 0, 0)\}$ .

## Exo 7

(1) Le groupe  $GL_n(\mathbb{R})$  est-il sous-variété de  $M_n(\mathbb{R})$  ?

OUI car c'est un ouvert de  $M_n(\mathbb{R})$ , puisque

$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\underbrace{]-\infty, 0[ \cup ]0, \infty[}_{\text{est ouvert}})$  où  $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue (même lin.)

Donc  $GL_n(\mathbb{R})$  a la même dimension de  $M_n(\mathbb{R})$  :  $n^2$ .

(2) M.q.  $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$  est une sous-variété de  $M_n(\mathbb{R})$ .

De quelle dimension ?

• Puisque  $SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ , il suffit de montrer que  $d(\det)$  a rang constant (disons  $k$ ), et on a  $\dim(SL_n(\mathbb{R})) = n^2 - k$ .

• Pour calculer  $d(\det)$ , on se place dans l'ouvert  $GL_n(\mathbb{R})$  contenant  $SL_n(\mathbb{R})$  :

$\forall A \in GL_n$  (A inversible) et  $\forall H \in M_n(\mathbb{R})$ , on a :

$$\det(A+H) = \det(A(\mathbb{1} + A^{-1}H)) = \det(A) \cdot \det(\mathbb{1} + A^{-1}H)$$

Si  $H \rightarrow 0$  (en norme dans  $M_n(\mathbb{R})$ , e.g.  $\|H\| = \sum |h_{ij}|$  ou  $\sup |h_{ij}|$ ),

on a  $\det(\mathbb{1} + A^{-1}H) = 1 + \text{Tr}(A^{-1}H) + o(H^2)$ , donc

$$\det(A+H) - \det(A) = \det(A) \cdot \text{Tr}(A^{-1}H) + o(H^2)$$

• Donc  $d(\det)_A : M_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{lin}} \mathbb{R} : H \mapsto \underbrace{\det(A)}_{\neq 0} \cdot \text{Tr}(A^{-1}H)$ .

Le rang de  $d(\det)_A$ , i.e. la dimension de l'image, est donc constant = 1.

• Par conséquent,  $SL_n(\mathbb{R})$  est une sous-variété de  $M_n(\mathbb{R})$  de dimension  $n^2 - 1$ .

(3) M.q.  $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^t\}$  est une sous-variété de  $M_n(\mathbb{R})$ . De quelle dim ?

• On a  $O_n(\mathbb{R}) = F^{-1}(\mathbb{1})$  pour  $F : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) : A \mapsto F(A) = A^t A$ .

• Calculons  $dF_A$  t.e.  $\forall H \in M_n(\mathbb{R}) : F(A+H) - F(A) = dF_A(H) + o(H^2)$ .

$$\begin{aligned} F(A+H) - F(A) &= (A+H)^t(A+H) - A^t A = \cancel{A^t A} + H^t A + A^t H + H^t H - \cancel{A^t A} \\ &= H^t A + A^t H + o(H^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dF_A(H) = H^t A + A^t H = (A^t H)^t + A^t H = \text{symétrisée de } A^t H.$$

•  $H \in \text{Ker}(dF_A(H)) \Leftrightarrow \text{symétrisée de } A^t H = 0$

$\Leftrightarrow A^t H$  est antisymétrique, i.e.  $A^t H \in \mathfrak{so}(n) (\Leftrightarrow H \in \mathfrak{so}(n))$

•  $\dim \text{Ker}(dF_A(H)) = \dim \mathfrak{so}(n) = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow \text{rk}(dF_A) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2}$  est constant.

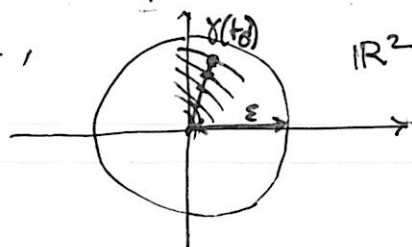
• Donc  $O_n(\mathbb{R})$  est sous-variété et  $\dim O_n(\mathbb{R}) = n^2 - \text{rk}(dF_A) = n^2 - n^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$   $\square$

Exo 8 Le support du cusp  $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , est-il une sous-variété? Et pour  $t \geq 0$ ? Et pour  $t > 0$ ?

- Le plus simple est de considérer le cas  $t > 0$ :  
la paramétrisation  $\gamma: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  est régulière ( $\gamma'(t) = (2t, 3t^2) \neq \vec{0} \forall t$ )  
donc  $d\gamma_t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une application linéaire injectrice ( $\text{rk } d\gamma_t = 1 = \text{max}$ )  
et par conséquent  $\gamma$  est une immersion.  
De plus,  $\gamma$  est un homéomorphisme sur l'image  $C = \{(x, x^{\frac{3}{2}}) \mid x > 0\}$ ,  
car le réciproque  $\gamma^{-1}: C \rightarrow ]0, \infty[ : (x, x^{\frac{3}{2}}) \mapsto t = x^{\frac{1}{2}}$  est continue.  
Donc  $\gamma$  est un embedding, et son image  $C$  est une sous-variété.
- Si on considère aussi le point  $\gamma(0) = (0, 0)$ , la paramétrisation  $\gamma: [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  n'est plus définie sur un ouvert: il faut l'élever à une param.  $\tilde{\gamma}$  sur un ouvert  $]-\varepsilon, \infty[$  avec la même support de  $\gamma$  et t.q.  $\tilde{\gamma}(0) = (0, 0)$ . Sur  $]-\varepsilon, 0[$ , donc,  $\tilde{\gamma}$  prend nécessairement les valeurs de  $\tilde{\gamma}$  sur  $]0, \varepsilon'[$ , et donc  $\tilde{\gamma}$  n'est pas injective.  
Dans un voisinage de  $(0, 0)$  donc  $\tilde{\gamma}$  ne peut être un homéomorphisme.
- Enfin, si on considère tous les points  $\gamma(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ , le point  $(0, 0)$  est un point de rebroussement et  $\gamma$  n'est pas une sous-variété parce-que  $d\gamma_t$  n'est pas injectif en  $t=0$  (puisque  $\gamma'(0) = (0, 0)$ ).

Exo 9 Le support de la spirale log  $\gamma(t) = e^{at}(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , est-il une sous-variété? (supposons  $a > 0$ )

- Si on ne considère pas la limite  $(0, 0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t)$ , la spirale log est une sous-variété, car la paramétrisation  $\gamma$  est régulière (donc immersion) et un homéomorphisme avec réciproque  $\gamma^{-1}: \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R} : (x(t), y(t)) \mapsto t = \frac{\ln(x(t)^2 + y(t)^2)}{2a}$  continue.
- Si on considère aussi le point limite  $(0, 0)$ , alors  $\text{Im}(\gamma)$  n'est pas une sous-var, car  $\gamma^{-1}$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ . Visuellement, les branches de spirale (qui sont séparées l'une de l'autre dans  $\mathbb{R}^2$ ) ne peuvent être séparées de  $(0, 0)$ : pour tout disque ouvert  $U = D_\varepsilon(0, 0)$  centré en  $(0, 0)$  et pour tout  $\gamma(t_0) \in U$ ,  $U \cap \text{Im}(\gamma)$  contient infinie branches de spirale, toutes celles passant par le points  $\gamma(t_0 - 2\pi k)$  avec  $k > 0$ .



Exo 10 Trouver une paramétrisation locale de  $C = \{(x,y) \mid x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$  au voisinage des points  $(0,0)$  et  $(-1,0)$ .

• Soit  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^4 + y^3 - y^2 + x - y$ , et  $C = F^{-1}(0)$ .

### Thm des Fonctions Implicites

Si  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est  $C^2$  et t.q.  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$  par ex. car  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , alors  $\exists U \times V$  ouvert autour de  $(x_0, y_0)$  et  $\exists \varphi: U \rightarrow V: x \mapsto \varphi(x)$  t.q.

(1)  $\varphi(x_0) = y_0$

(2)  $F(x,y)|_{U \times V} = 0 \iff x \in U \text{ et } y = \varphi(x)$

i.e.  $(x,y) \in C = F^{-1}(0)|_{U \times V}$  i.e.  $C \cap (U \times V) = \{ \gamma(x) = (x, \varphi(x)) \mid x \in U \}$

et  $\gamma'(x) = (1, \varphi'(x))$ ,  $\gamma''(x) = (0, \varphi''(x))$  où

(3)  $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$  sur  $U \implies \partial_x F + \partial_y F \cdot \varphi'(x) \equiv 0$  i.e.  $\varphi'(x) = -\frac{\partial_x F(x, \varphi(x))}{\partial_y F(x, \varphi(x))}$

(4)  $\implies \partial_{xx}^2 F + 2\partial_{xy}^2 F \cdot \varphi'(x) + \partial_{yy}^2 F \cdot \varphi'(x)^2 + \partial_y F \cdot \varphi''(x) = 0$

i.e.  $\varphi''(x) = -\frac{1}{\partial_y F} (\partial_{xx}^2 F + 2\partial_{xy}^2 F \cdot \varphi'(x) + \partial_{yy}^2 F \cdot \varphi'(x)^2)$ .

Par conséquent, une param. de  $C$  autour de  $(x_0, y_0)$  est donnée par

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= (x, \varphi(x)) = (x, \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)) \\ &= (x_0, y_0) + (1, \varphi'(x_0))(x-x_0) + \frac{1}{2}(0, \varphi''(x_0))(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) \\ &= \gamma(x_0) + \gamma'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\gamma''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2). \end{aligned}$$

• Ici:  $F(x,y) = x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0 \implies F(0,0) = 0 \implies (0,0) \in C$   
 $F(-1,0) = 0 \implies (-1,0) \in C$ .

$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3+1 \\ 3y^2-2y-1 \end{pmatrix} \implies \nabla F(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ,  $\nabla F(-1,0) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$  ok

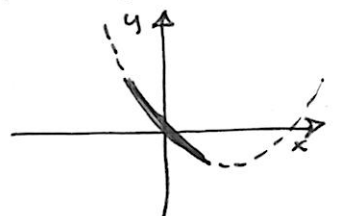
$H_F(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 6y-2 \end{pmatrix} \implies H_F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $H_F(-1,0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

• Autour de  $(0,0)$ :  $F_y(0,0) = -1 \neq 0 \implies \exists U \times V \ni (0,0)$ ,  $\exists \varphi: U \rightarrow V: x \mapsto \varphi(x)$  t.q.

(1)  $\gamma(0) = (0, \varphi(0)) = (0,0)$  (2)  $C \cap (U \times V) = \{ \gamma(x) = (x, \varphi(x)) \mid x \in U \}$

(3)  $\varphi'(0) = -\frac{1}{-1} = 1$  (4)  $\varphi''(0) = -\frac{1}{-1}(0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 1) = -2$

$\implies \varphi(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{1}{2}(-2)x^2 + o(x^2) \implies \gamma(x) = (x, x - x^2 + o(x^2))$



• Autour de  $(-1,0)$ :  $F_x(-1,0) = -3 \neq 0 \implies \exists U' \times V' \ni (-1,0)$ ,  $\exists \psi: U' \rightarrow V': y \mapsto \psi(y)$  t.q.

(1)  $\gamma(0) = (\psi(0), 0) = (-1,0)$  (2)  $C \cap (U' \times V') = \{ \gamma(y) = (\psi(y), y) \mid y \in V' \}$

(3)  $\psi'(0) = -\frac{-1}{-3} = -\frac{1}{3}$  (4)  $\psi''(0) = -\frac{1}{-3}(-2 + 2 \cdot 0 \cdot (-\frac{1}{3}) + 12 \cdot \frac{1}{9}) = \frac{-2+4}{3} = \frac{-6+4}{3} = -\frac{2}{3}$

$\implies \psi(y) = -1 - \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}(-\frac{2}{3})y^2 + o(y^2) = -1 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2)$

$\implies \gamma(y) = (-1 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2), y)$

