

Exo 1 $L_n = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{1}{n} \} \quad n \in \mathbb{N}^*$, $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} L_n$

(1) M est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

OUI, preuve: Posons $I_1 =]\frac{1}{2}, 2[$, $I_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[$ ouverts de $\mathbb{R}$.



$\forall (a,b) \in M$, $\exists ! n$ tq $(a,b) \in L_n$ i.e. $a = \frac{1}{n}$.

Posons $U = I_n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x,y) \mapsto \varphi(x,y) = (y, x - \frac{1}{n})$.

Alors φ est un difféo C^∞ (car linéaire) sur $\varphi(U) = \mathbb{R} \times (I_n - \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}^2$ ouvert,

où $I_n - \frac{1}{n} =]\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}[$.

On a $M \cap U = L_n$ et $\varphi(M \cap U) = \varphi(L_n) = \mathbb{R} \times \{0\} = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$,
 donc M est une sous-variété de dim. 1 de $\mathbb{R}^2$.

(2) $M_0 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0 \}$ et $M' = M \cup M_0$. M' est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

NON, car pour $(0,0) \in M_0 \subset M'$, s'il existe U voisinage ouvert de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$

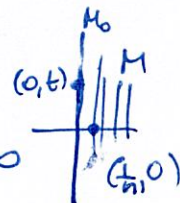
et $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ difféo sur $\varphi(U)$ t.q. $\varphi(M' \cap U) = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cap \varphi(U)$,

et si on suppose $\varphi(0,0) = (0,0)$, ce qui est vrai à moins d'une translation,

alors: si $\varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$, on a $\varphi_2(M' \cap U) = \{0\} \subset \mathbb{R}$.

• Considérons $(0,t) \in M' \cap U$ pour petit t , alors:

$$\varphi_2(0,t) = 0 \quad \forall t \text{ petit} \Rightarrow \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_2(0,0+t) - \varphi_2(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0$$



• Considérons $(\frac{1}{n}, 0) \in M' \cap U$ pour n grand, alors:

$$\varphi_2(\frac{1}{n}, 0) = 0 \quad \forall n \text{ grand} \Rightarrow \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0,0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_2(\frac{1}{n}, 0) - \varphi_2(0,0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{1}{n}} = 0$$

Donc $J\varphi(0,0)$ n'est pas inversible, i.e. $d\varphi_{(0,0)}$ n'est pas un iso,
 et φ ne peut être un difféo.

Exo 2 (1) Exemple d'intersection de deux sous-var. de $\mathbb{R}^3$ qui est une sous-var:

$S_1 = \text{sphère } S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

$S_2 = \text{cylindre } \{x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$

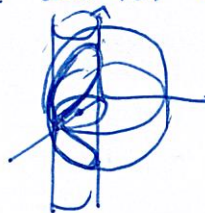


$S_1 \cap S_2 = \text{deux cercles}$

(2) Exemple d'intersection de deux sous-var de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas une sous-var:

$S_1 = \text{sphère } S^2$

$S_2 = \text{cylindre } \{(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$



$S_1 \cap S_2 = \text{courbe à huit}$

Exo 3

(1) Pour quels $d \in \mathbb{R}$ l'ensemble $A_d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = d\}$ est sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

• $A_d = f_d^{-1}(0)$ pour $f_d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2 - d$

donc A_d est sous-variété si 0 est une valeur régulière de f_d .

$$\nabla f_d(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ et } (0, 0) \in f_d^{-1}(0) \text{ ssi } d=0$$

• Donc si $d \neq 0$, f_d est une submersion sur $\mathbb{R}^2$, donc $f_d^{-1}(0) = A_d$ est sous-variété de dimension 1.

• Pour $d=0$, on a $A_0 = \{x^2 - y^2 = 0\} = \{y=x\} \cup \{y=-x\}$ ~~X~~ qui n'est pas sous-variété.

(2) Pour quels $\beta \in \mathbb{R}$ l'ensemble $B_\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 = \beta\}$ est sous-variété?

• $B_\beta = g_\beta^{-1}(0)$ pour $g_\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - y^3 - \beta$.

donc B_β est sous-variété si 0 est une valeur rég. de g_β .

$$\nabla g_\beta(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ et } (0, 0) \in g_\beta^{-1}(0) \text{ ssi } \beta=0$$

• Pour $\beta \neq 0$, g_β est submersion donc $B_\beta = g_\beta^{-1}(0)$ est sous-variété.

• Pour $\beta=0$, on a $B = \{x^3 - y^3 = 0\} = \{y=x\}$ qui est aussi une sous-variété,

car $B_0 = \tilde{g}_0^{-1}(0)$ pour $\tilde{g}_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - y$

qui est une submersion car $\nabla \tilde{g}_0(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \forall (x, y)$.

Exo 4 Les ensembles suivants sont-ils des sous-variétés?

(1) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^5 - 3y^2 - z = 0\}$

OUI, car $S_1 = \text{graphe de } F_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto F_1(x, y) = x^5 - 3y^2 = z$.

(2) $S_2 = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 \mid xy^2 - u = 0, x^3 + 3yz - v = 0\}$

OUI, car $S_2 = \text{graphe de } F_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^3 + 3yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

(3) $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy^2 - z = 0, x + y = 0\}$

On peut voir $S_3 = F_3^{-1}(0)$ où $F_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} xy^2 - z \\ x + y \end{pmatrix}$

Or, $JF_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a rang 2 $\forall (x, y, z)$
 $\det = 1$

donc F_3 est une submersion et $S_3 = F_3^{-1}(0)$ est une sous-variété de dimension $3-2=1$.

Exo 5 Les sous-ensembles suivants, sont-ils des sous-variétés ?

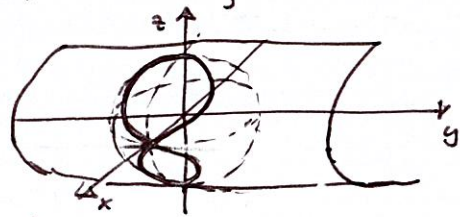
(1) Cubrique $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 13 = 0\}$

- $S = F^{-1}(0)$ pour $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 13$ lisse.
- $\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3yz \\ 3y^2 - 3xz \\ 3z^2 - 3xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - yz = 0 & x \neq 0 \\ y^2 - xz = 0 & y \neq 0 \\ z^2 - xy = 0 & z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - yz = 0 \\ y^2 - xz = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \end{cases}$ impossible sur $S: 13$
- Donc F est une submersion en tout point de $S \Rightarrow S$ est sous-variété de dim. 2.

(2) Fenêtre de Viriani $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 - x = 0\}$

$\Rightarrow C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 1 - z^2\}$

C'est l'intersection de la sphère S^2 avec un cylindre parabolique.



- $C = F^{-1}(0,0)$ pour $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x + z^2 - 1 \end{pmatrix}$ lisse.
- $JF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 0 & 2z \end{pmatrix}$ quel est le rang de $JF(x, y, z)$?
 si $y \neq 0$, $\text{rk } JF = 2$ maximal
 si $y = 0$ et $z \neq 0$, $\text{rk } JF = 2$ maximal
 si $y = 0$ et $z = 0$, $\text{rk } JF = 1$: $C \cap \{y=0, z=0\} = \{(1, 0, 0)\} \neq \emptyset$
- Puisque $dF_{(1,0,0)}$ n'a pas rang maximal, la valeur $(0,0) = F(1,0,0)$ n'est pas régulière pour F , donc $F^{-1}(0,0)$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
- En effet, le point $(1,0,0)$ est un point double de C .
 Pour le voir, étudions C au voisinage de $(1,0,0)$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = 1 - z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 - z^2 = 1 - (1 - z^2)^2 - z^2 = z^2 - z^4 \\ x = 1 - z^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm z \sqrt{1 - z^2} \sim_{z \rightarrow 0} \pm z(1 - \frac{1}{2}z^2) \\ x = 1 - z^2 \end{cases}$$
- Au voisinage de $(1,0,0)$, quand $z \rightarrow 0$ et $y \rightarrow 0$, la courbe C est composée de deux branches :

$$\begin{cases} x = 1 - z^2 \\ y \sim z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 - z^2 \\ y \sim -z \end{cases}$$

Exo 6

Quel est le sous-espace maximale de l'intersection entre la sphère $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et le cylindre $S = \{(x, y, z) \mid (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$ qui forme une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

• $\mathbb{S}^2 \cap S = F^{-1}((0,0))$ pour $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

• $JF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2(x - \frac{1}{2}) & 2y & 0 \end{pmatrix}$: quel est le rang ?

Puisque $\begin{pmatrix} 2x \\ 2(x - \frac{1}{2}) \end{pmatrix}$ ne s'annule pas $\forall x \in \mathbb{R}$, prenons cette colonne avec une des deux autres :

si $y \neq 0$, $\text{rk } JF = 2$ max.

si $y = 0$, $z \neq 0$ et $x \neq \frac{1}{2}$, $\text{rk } JF = 2$ max.

si $y = 0$, $z \neq 0$ et $x = \frac{1}{2}$, $\text{rk } JF = 1$

si $y = 0$ et $z = 0$, $\text{rk } JF = 1$.

• En somme : $\text{rk } JF(x, y, z) = 2 \iff (x, y, z) \notin \underbrace{\{(\frac{1}{2}, 0, z) \mid z \neq 0\}}_A \cup \underbrace{\{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}}_B$

• On a : $F(\frac{1}{2}, 0, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + z^2 - 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \forall z$, donc $A \not\subset F^{-1}((0,0))$

$$F(x, 0, 0) = \begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ (\pm 1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \iff x = 1$$

donc $(1, 0, 0) \in B \cap F^{-1}((0,0))$!

• Donc $F^{-1}((0,0)) \setminus \{(1, 0, 0)\}$ est une sous-variété (de dim. $3 - 2 = 1$) de $\mathbb{R}^3$.

• Le point $(1, 0, 0)$ est double (cf. Exo 5), donc la sous-variété maximale de $\mathbb{S}^2 \cap S$ est $F^{-1}((0,0)) \setminus \{(1, 0, 0)\}$.

Exo 7

(1) Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ est-il sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$?

OUI car c'est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$, puisque

$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\underbrace{]-\infty, 0[\cup]0, \infty[}_{\text{est ouvert}})$ où $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (même lin.)

Donc $GL_n(\mathbb{R})$ a la même dimension de $M_n(\mathbb{R})$: n^2 .

(2) M.q. $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.

De quelle dimension ?

- Puisque $SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$, il suffit de montrer que $d(\det)$ a rang constant (disons k), et on a $\dim(SL_n(\mathbb{R})) = n^2 - k$.
- Pour calculer $d(\det)$, on se place dans l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $SL_n(\mathbb{R})$:
 $\forall A \in GL_n$ (A inversible) et $\forall H \in M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\det(A+H) = \det(A(\mathbb{1} + A^{-1}H)) = \det(A) \cdot \det(\mathbb{1} + A^{-1}H)$$

Si $H \rightarrow 0$ (en norme dans $M_n(\mathbb{R})$, e.g. $\|H\| = \sum |h_{ij}|$ ou $\sup |h_{ij}|$),

on a $\det(\mathbb{1} + A^{-1}H) = 1 + \text{Tr}(A^{-1}H) + o(H^2)$, donc

$$\det(A+H) - \det(A) = \det(A) \cdot \text{Tr}(A^{-1}H) + o(H^2)$$

• Donc $d(\det)_A : M_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{lin}} \mathbb{R} : H \mapsto \underbrace{\det(A)}_{\neq 0} \cdot \text{Tr}(A^{-1}H)$.

Le rang de $d(\det)_A$, i.e. la dimension de l'image, est donc constant = 1.

- Par conséquent, $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.

(3) M.q. $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^t\}$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. De quelle dim ?

• On a $O_n(\mathbb{R}) = F^{-1}(\mathbb{1})$ pour $F : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) : A \mapsto F(A) = A^t A$.

• Calculons dF_A t.q. $\forall H \in M_n(\mathbb{R}) : F(A+H) - F(A) = dF_A(H) + o(H^2)$.

$$\begin{aligned} F(A+H) - F(A) &= (A+H)^t(A+H) - A^t A = \cancel{A^t A} + H^t A + A^t H + H^t H - \cancel{A^t A} \\ &= H^t A + A^t H + o(H^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dF_A(H) = H^t A + A^t H = (A^t H)^t + A^t H = \text{symétrisée de } A^t H.$$

- Puisque $A \in O_n(\mathbb{R})$ est inversible (donc A^t omi) l'application $H \mapsto \text{Sym}(A^t H)$ a rang constant.

• Considérons alors $F : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Im}(F) = \{\text{matrices symétriques}\} \subset M_n(\mathbb{R})$.

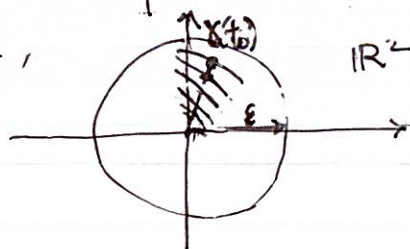
$\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, dF_A a rang max = $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(F) = \frac{n(n+1)}{2}$, donc $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dim. = $n - \text{rk } dF_A = n - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exo 8 Le support du cusp $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, est-il une sous-variété? Et pour $t \geq 0$? Et pour $t > 0$?

- Le plus simple est de considérer le cas $t > 0$:
la paramétrisation $\gamma:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ est régulière ($\gamma'(t) = (2t, 3t^2) \neq \vec{0} \forall t$)
donc $d\gamma_t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application linéaire injectrice ($\text{rk } d\gamma_t = 1 \text{ max}$)
et par conséquent γ est une immersion.
De plus, γ est un homéomorphisme sur l'image $C = \{(x, x^{\frac{3}{2}}) \mid x > 0\}$,
car la réciproque $\gamma^{-1}: C \rightarrow]0, \infty[: (x, x^{\frac{3}{2}}) \mapsto t = x^{\frac{1}{2}}$ est continue.
Donc γ est un embedding, et son image C est une sous-variété.
- Si on considère aussi le point $\gamma(0) = (0, 0)$, la paramétrisation $\gamma: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ n'est plus définie sur un ouvert: il faut l'élever à une param. $\tilde{\gamma}$ sur un ouvert $]-\varepsilon, \infty[$ avec la même support de γ et t.q. $\tilde{\gamma}(0) = (0, 0)$. Sur $]-\varepsilon, 0[$, donc, $\tilde{\gamma}$ prend nécessairement les valeurs de $\tilde{\gamma}$ sur $]0, \varepsilon[$, et donc $\tilde{\gamma}$ n'est pas injective.
Dans un voisinage de $(0, 0)$ donc $\tilde{\gamma}$ ne peut être un homéomorphisme.
- Enfin, si on considère tous les points $\gamma(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, le point $(0, 0)$ est un point de rebroussement et γ n'est pas une sous-variété parce-que $d\gamma_t$ n'est pas injectif en $t=0$ (puisque $\gamma'(0) = (0, 0)$).

Exo 9 Le support de la spirale log $\gamma(t) = e^{at}(\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, est-il une sous-variété? (supposons $a > 0$)

- Si on ne considère pas la limite $(0, 0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t)$, la spirale log est une sous-variété, car la paramétrisation γ est régulière (donc immersion) et un homéomorphisme avec réciproque $\gamma^{-1}: \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R} : (x(t), y(t)) \mapsto t = \frac{\ln(x(t)^2 + y(t)^2)}{2a}$ continue.
- Si on considère aussi le point limite $(0, 0)$, alors $\text{Im}(\gamma)$ n'est pas une sous-var, car γ^{-1} n'est pas continue en $(0, 0)$. Visuellement, les branches de spirale (q's sont séparées l'une de l'autre dans $\mathbb{R}^2$) ne peuvent être séparées de $(0, 0)$:
pour tout disque ouvert $U = D_\varepsilon(0, 0)$ centré en $(0, 0)$ et pour tout $\gamma(t_0) \in U$,
 $U \cap \text{Im}(\gamma)$ contient infinie branches de spirale,
toutes celles passant par les points $\gamma(t_0 - 2\pi k)$ avec $k > 0$.



Exo 10 Trouver une paramétrisation locale de $C = \{(x,y) \mid x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $(0,0)$ et $(-1,0)$.

• Soit $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^4 + y^3 - y^2 + x - y$, et $C = F^{-1}(0)$.

Thm des Fonctions Implicites

Si $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est C^2 et t.q. $F(x_0, y_0) = 0$, $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$ par ex. car $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, alors $\exists U \times V$ ouvert autour de (x_0, y_0) et $\exists \varphi: U \rightarrow V: x \mapsto \varphi(x)$ t.q.

(1) $\varphi(x_0) = y_0$

(2) $F(x,y)|_{U \times V} = 0 \iff x \in U \text{ et } y = \varphi(x)$

i.e. $(x,y) \in C = F^{-1}(0)|_{U \times V}$ i.e. $C \cap (U \times V) = \{ \gamma(x) = (x, \varphi(x)) \mid x \in U \}$

et $\gamma'(x) = (1, \varphi'(x))$, $\gamma''(x) = (0, \varphi''(x))$ où

(3) $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$ sur $U \implies \partial_x F + \partial_y F \cdot \varphi'(x) \equiv 0$ i.e. $\varphi'(x) = -\frac{\partial_x F(x, \varphi(x))}{\partial_y F(x, \varphi(x))}$

(4) $\implies \partial_{xx}^2 F + 2\partial_{xy}^2 F \cdot \varphi'(x) + \partial_{yy}^2 F \cdot \varphi'(x)^2 + \partial_y F \cdot \varphi''(x) = 0$

i.e. $\varphi''(x) = -\frac{1}{\partial_y F} (\partial_{xx}^2 F + 2\partial_{xy}^2 F \cdot \varphi'(x) + \partial_{yy}^2 F \cdot \varphi'(x)^2)$.

Par conséquent, une param. de C autour de (x_0, y_0) est donnée par

$$\begin{aligned} \gamma(x) = (x, \varphi(x)) &= (x, \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)) \\ &= (x_0, y_0) + (1, \varphi'(x_0))(x-x_0) + \frac{1}{2}(0, \varphi''(x_0))(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) \\ &= \gamma(x_0) + \gamma'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\gamma''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2). \end{aligned}$$

• Ici: $F(x,y) = x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0 \implies F(0,0) = 0 \implies (0,0) \in C$
 $F(-1,0) = 0 \implies (-1,0) \in C$.

$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3+1 \\ 3y^2-2y-1 \end{pmatrix} \implies \nabla F(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, $\nabla F(-1,0) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ok

$H_F(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 6y-2 \end{pmatrix} \implies H_F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $H_F(-1,0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

• Autour de $(0,0)$: $F_y(0,0) = -1 \neq 0 \implies \exists U \times V \ni (0,0)$, $\exists \varphi: U \rightarrow V: x \mapsto \varphi(x)$ t.q.

(1) $\gamma(0) = (0, \varphi(0)) = (0,0)$ (2) $C \cap (U \times V) = \{ \gamma(x) = (x, \varphi(x)) \mid x \in U \}$

(3) $\varphi'(0) = -\frac{1}{-1} = 1$ (4) $\varphi''(0) = -\frac{1}{-1}(0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 1) = -2$

$\implies \varphi(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{1}{2}(-2)x^2 + o(x^2) \implies \gamma(x) = (x, x - x^2 + o(x^2))$



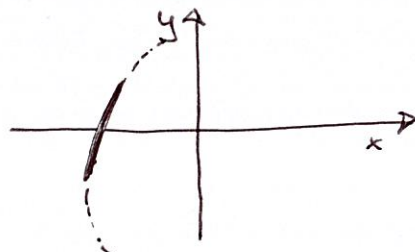
• Autour de $(-1,0)$: $F_x(-1,0) = -3 \neq 0 \implies \exists U' \times V' \ni (-1,0)$, $\exists \psi: U' \rightarrow V': y \mapsto \psi(y)$ t.q.

(1) $\gamma(0) = (\psi(0), 0) = (-1,0)$ (2) $C \cap (U' \times V') = \{ \gamma(y) = (\psi(y), y) \mid y \in V' \}$

(3) $\psi'(0) = -\frac{-1}{-3} = -\frac{1}{3}$ (4) $\psi''(0) = -\frac{1}{-3}(-2 + 2 \cdot 0 \cdot (-\frac{1}{3}) + 12 \cdot \frac{1}{9}) = \frac{-2+4}{3} = \frac{-6+4}{3} = -\frac{2}{3}$

$\implies \psi(y) = -1 - \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}(-\frac{2}{3})y^2 + o(y^2) = -1 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2)$

$\implies \gamma(y) = (-1 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2), y)$



Exo 11

Sphère $\mathbb{S}^2$ paramétrisée par $f(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$
 pour $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Rappel: (a) $\mathbb{S}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Preuve: $\mathbb{S}^2 = F^{-1}(0)$ pour $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

et F est une immersion sur $\mathbb{S}^2$, donc $0 \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière de $F|_{\mathbb{S}^2}$.

En effet: $\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$.

(b) Le changement aux coordonnées sphériques

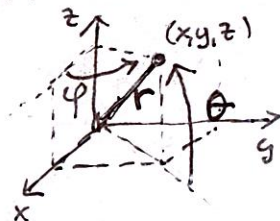
$$H:]0, \infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, \theta, \varphi) \longmapsto H(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta)$$

est un C^∞ -difféomorphisme sur son image $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$

Preuve: H est C^∞ et

$$JH(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} \text{Jac } H = \det(JH) &= \sin \theta \begin{vmatrix} -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \end{vmatrix} - r \cos \theta \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= \sin \theta (-r^2 \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)) - r \cos \theta (r \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)) \\ &= -r^2 (\cos \theta \sin^2 \theta + \cos^3 \theta) = -r^2 \cos \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = -r^2 \cos \theta \end{aligned}$$

$\Rightarrow JH$ est inversible $\forall r \neq 0$ et $\theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$.

(c) Normalement on étend H aux valeurs:

$r=0$ (même si φ et θ ne sont pas définies en $(0,0,0)$) par $H(0, \varphi, \theta) = (0,0,0)$

$\varphi=0$ par $H(r, \theta, 0) = (r \cos \theta, 0, r \sin \theta)$

$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ par $H(r, \frac{\pi}{2}, \varphi) = (0,0,r)$ et $H(r, -\frac{\pi}{2}, \varphi) = (0,0,-r)$.

(d) La sphère unitaire est donnée en coordonnées sphériques par $r=1$:

$$\forall (\theta, \varphi): f(\theta, \varphi) = H(1, \theta, \varphi) \in \mathbb{S}^2$$

$$\text{et } \mathbb{S}^2 = \{ f(\theta, \varphi) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \}.$$

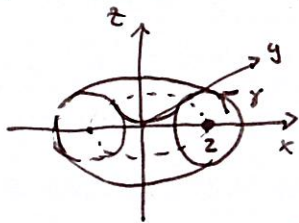
Exo 12

(1) Montrer que la tore $\mathbb{T}^2$ paramétrisé par

$$f(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u) \quad u \in [0, 2\pi[, v \in [0, 2\pi[$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Rem: $\mathbb{T}^2$ est une surface de révolution autour de $\vec{Oz}$, car



si on pose $\gamma(u) = (2 + \cos u, 0, \sin u)$, $u \in [0, 2\pi[$

le cercle vertical de rayon 1 centré en $(2, 0, 0)$

et on le fait tourner autour de $\vec{Oz}$ d'angle $v \in [0, 2\pi[$

$$\text{on obtient } R_v^{\vec{Oz}} \cdot \gamma(u) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + \cos u \\ 0 \\ \sin u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 + \cos u) \cos v \\ (2 + \cos u) \sin v \\ \sin u \end{pmatrix} = f(u, v).$$

• $f:]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion, car

$$Jf(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v & -(2 + \cos u) \sin v \\ -\sin u \sin v & (2 + \cos u) \cos v \\ \cos u & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a rang maximal (=2) ssi}$$

$$\det \begin{pmatrix} -\sin u \cos v & -(2 + \cos u) \sin v \\ -\sin u \sin v & (2 + \cos u) \cos v \end{pmatrix} = -\sin u \underbrace{(2 + \cos u)}_{\neq 0} \underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_1 \neq 0$$

ce qui arrive ssi $u \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e. ssi $u \neq 0, \pi$ dans $[0, 2\pi[$

et dans ces deux points on a:

$$Jf(0, v) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \sin v \\ 0 & 3 \cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a rk} = 2 \quad \forall v$$

$$Jf(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin v \\ 0 & \cos v \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a rk} = 2 \quad \forall v.$$

• De plus, f est injective, donc c'est une bijection sur son image (le tore).

• Enfin, f est un plongement, i.e. un homéomorphisme sur son image $\subset \mathbb{R}^3$, car l'inverse de f de l'image est continue (p.r. à la top. de $\mathbb{R}^3$):

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{T}^2 = \text{image de } f, \exists (u, v) \text{ tq.}$

$$\begin{cases} x = (2 + \cos u) \cos v \\ y = (2 + \cos u) \sin v \\ z = \sin u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = (2 + \cos u)^2 \\ z = \sin u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos u = \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \\ \sin u = z \end{cases} \Rightarrow u = u(x, y, z)$$

est fct continue
car $(0, 0, z) \notin \mathbb{T}^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \Rightarrow v = v(x, y, z)$$

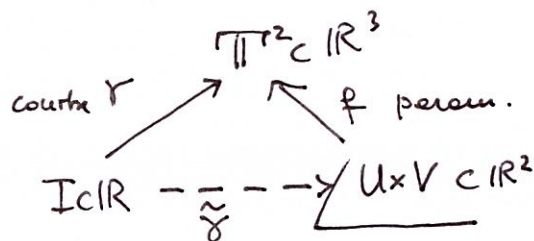
est aussi fct continue.

(2) Montrer que, si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la courbe paramétrée

$$\gamma(t) = ((2 + \cos t) \cos(\alpha t), (2 + \cos t) \sin(\alpha t), \sin t) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{R} \bmod 2\pi = [0, 2\pi[$$

est partout dense sur la tore, et expliquer pourquoi ce n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

- On a $\gamma(t) = f(u(t), v(t))$ avec $\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = \alpha t \end{cases}$ courbe $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans l'espace des paramètres



- Puisque f est un homéomorphisme dans $\mathbb{T}^2$, il suffit de montrer que l'image de $\tilde{\gamma}$ est dense dans $[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[\subset \mathbb{R}^2$.

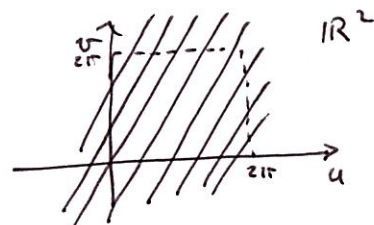
- Considérons $\tilde{\gamma}(t) = (t \bmod 2\pi, \alpha t \bmod 2\pi)$, $t \in \mathbb{R}$

i.e. $\tilde{\gamma}(t) = (u(t), v(t))$ avec $\begin{cases} u(t) = t + 2\pi k \\ v(t) = \alpha t + 2\pi \ell \end{cases} \quad k, \ell \in \mathbb{Z}$.

L'image de $\tilde{\gamma}$ dans $\mathbb{R}^2$ est la famille de droites

$$v = \alpha(u - 2\pi k) + 2\pi \ell = \alpha u + 2\pi(\ell - \alpha k), \quad \ell, k \in \mathbb{Z}$$

de pente α .



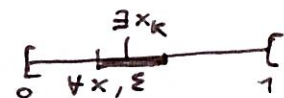
Montrons que, si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\{\text{droites}\}$ dense dans $[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$

car $\{\text{droites} \cap \text{axe } \vec{Ou}\}$ est dense dans $[0, 2\pi[$.

- Or, $\{\text{droites} \cap \text{axe } \vec{Ou}\} = \left\{ u = -\frac{2\pi}{\alpha}(\ell - \alpha k) = -\frac{2\pi}{\alpha} \ell + 2\pi k \mid \ell, k \in \mathbb{Z} \right\}$
 $= \left\{ u_n = \frac{2\pi}{\alpha} n \bmod 2\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ est dense dans $[0, 2\pi[$

$$\Leftrightarrow \left\{ x_n = \frac{u_n}{2\pi} = \frac{n}{\alpha} \bmod 1 \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \text{ est dense dans } [0, 1[$$

i.e. $\forall \tilde{x} \in [0, 1[, \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } |(\tilde{x} - x_k) \bmod 1| < \varepsilon$



- Soit $N > \frac{1}{\varepsilon}$, donc $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Divisons l'intervalle $[0, 1]$ en N intervalles de longueur $\frac{1}{N}$ et considérons les elts $x_0, x_1, \dots, x_N \pmod{1}$.

- Principe de Dirichlet: $N+1$ elts dans N boîtes

$\Rightarrow$ deux elts sont dans la même boîte

Donc $\exists 0 \leq m, n \leq N, m \neq n$ (ex. $m < n$) t.q. $|(x_n - x_m) \bmod 1| < \frac{1}{N}$.

Alors $|(x_n - x_m) \bmod 1| = \left| \left(\frac{n}{\alpha} - \frac{m}{\alpha} \right) \bmod 1 \right| = \left| \frac{(n-m)}{\alpha} \bmod 1 \right| = \left| \frac{\ell}{\alpha} \bmod 1 \right| = a \neq 0$ car $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\ell \neq 0$

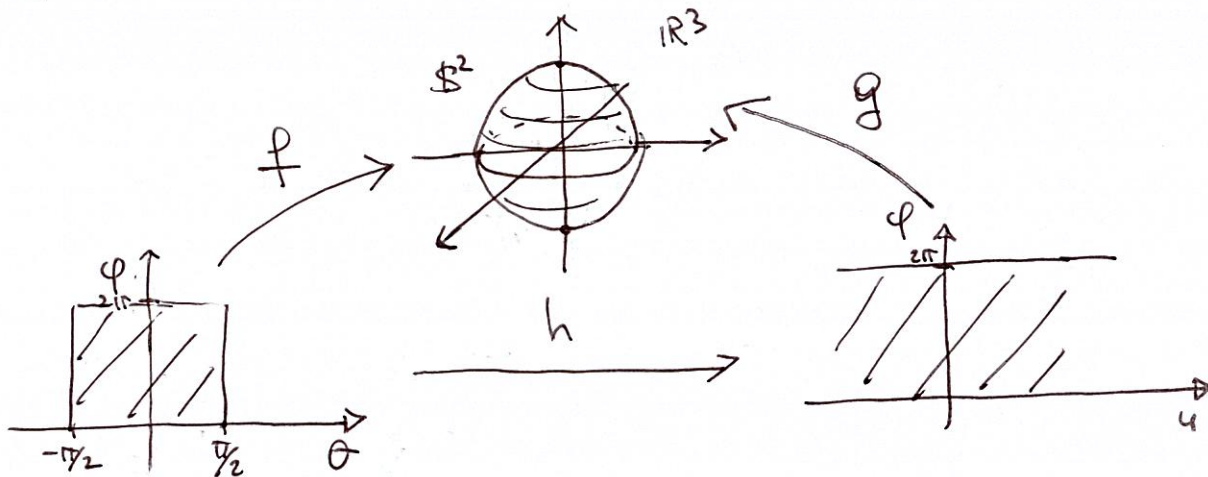
- Soit $\tilde{k} = \left\lfloor \frac{\tilde{x} - x_0}{a} \right\rfloor$ partie entière. Alors $x_0 + a\tilde{k} \leq \tilde{x} < x_0 + a(\tilde{k} + 1) = (x_0 + a\tilde{k}) + a$

donc pour $k = \tilde{k} \in \mathbb{Z}$ on a $x_0 + a\tilde{k} = 0 + \frac{\ell\tilde{k}}{\alpha} = x_k \leq \tilde{x} < x_k + a$

i.e. $|\tilde{x} - x_k| < |a| < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Suite Exo 11

- (1) M.g. $u = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ donne un changement de paramétrisation pour S^2 et trouver la nouvelle paramétrisation $g(u, \varphi)$.



- Posons $h:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(\theta, \varphi) \longmapsto h(\theta, \varphi) = (u(\theta), \varphi)$ avec $u(\theta) = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

- On veut montrer que h est un "changement de paramétrisation", i.e. un difféomorphisme sur son image (et qui s'étend à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$?).

En effet, h est C^∞ et

$$Jh(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} u'(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} \cdot \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est bien déf ssi $\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\theta + \frac{\pi}{2}) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
 et $\det Jh(\theta, \varphi) \neq 0$ ssi $\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\theta + \frac{\pi}{2}) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Donc h est bien un difféo pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On peut l'étendre à $\varphi = 0$ (i.e. à $\varphi \in [0, 2\pi[$), mais pas à $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$.

- Calculons $g(u, \varphi) := f(h^{-1}(u, \varphi))$.

On a $u = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \Leftrightarrow e^u = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ et il nous faut $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Posons $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, car $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$. Aussi : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Puisque } \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

$$\text{on a } \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(\frac{\theta}{2}) + \tan(\frac{\pi}{4})}{1 - \tan(\frac{\theta}{2})\tan(\frac{\pi}{4})} = \frac{t+1}{1-t}.$$

$$\Rightarrow e^u = \frac{t+1}{1-t} \Leftrightarrow (1+t)e^u = t+1 \Leftrightarrow t+te^u = e^u - 1 \Leftrightarrow t = \frac{e^u - 1}{e^u + 1}.$$

Par conséquent :

$$\cos \vartheta = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1 - \frac{(e^u-1)^2}{(e^u+1)^2}}{1 + \frac{(e^u-1)^2}{(e^u+1)^2}} = \frac{(e^u+1)^2 - (e^u-1)^2}{(e^u+1)^2 + (e^u-1)^2} = \frac{\cancel{e^{2u}} + 2e^u + 1 - \cancel{e^{2u}} + 2e^u - 1}{\cancel{e^{2u}} + 2e^u + 1 + \cancel{e^{2u}} - 2e^u - 1} = \frac{4e^u}{2(e^{2u}+1)} = \frac{2}{e^u + e^{-u}} = \frac{2}{\operatorname{ch}(u)}$$

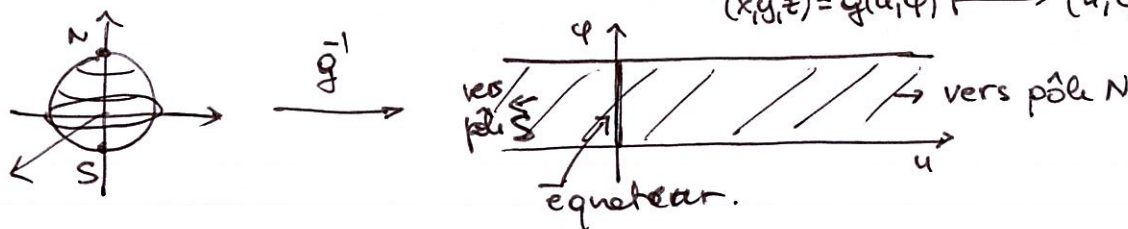
$$\sin \vartheta = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \frac{(e^u-1)}{e^u+1}}{\frac{(e^u+1)^2 + (e^u-1)^2}{(e^u+1)^2}} = \frac{2(e^u-1)(e^u+1)}{2(e^{2u}+1)} = \frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1} = \frac{e^u(e^u-e^{-u})}{e^u(e^u+e^{-u})} = \frac{\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)} = \operatorname{th}(u)$$

• Conclusion :

$$g(u, \varphi) := f(\theta(u), \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta) = \left(\frac{2 \cos(\varphi)}{\operatorname{ch}(u)}, \frac{2 \sin(\varphi)}{\operatorname{ch}(u)}, \frac{\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)} \right)$$

et on a $g: \mathbb{R} \times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ qui s'étend à $\mathbb{R} \times [0, 2\pi[$.

Rk : La projection de Mercatore est $\bar{g}^{-1}: \operatorname{Im}(g) \subset \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times [0, 2\pi[$
 $(x, y, z) = g(u, \varphi) \longmapsto (u, \varphi)$

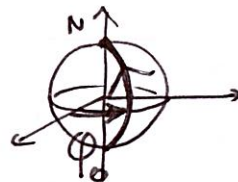


(2) Déterminer l'ensemble $\bar{g}^{-1}(C)$ où C est un méridien ou parallèle de $\mathbb{S}^2$.

• Méridien = courbe sur $\mathbb{S}^2$ à angle φ constant (demi-cercle)

$$\gamma_{\varphi_0}(\theta) := f(\theta, \varphi_0) = (\cos \theta \cos \varphi_0, \cos \theta \sin \varphi_0, \sin \theta)$$

pour $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$.

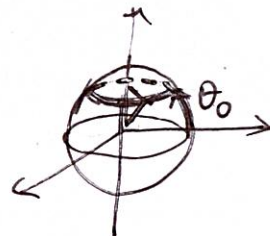


$$\Rightarrow \bar{g}^{-1}(C_{\varphi_0}) = \{(u(\theta), \varphi_0) \mid \theta \in]-\pi/2, \pi/2[\} = \mathbb{R} \times \{\varphi_0\}$$

• Parallèle = courbe sur $\mathbb{S}^2$ à angle θ constant (cercle)

$$\gamma_{\theta_0}(\varphi) := f(\theta_0, \varphi) = (\cos \theta_0 \cos \varphi, \cos \theta_0 \sin \varphi, \sin \theta_0)$$

pour $\varphi \in [0, 2\pi[$.



$$\Rightarrow \bar{g}^{-1}(C_{\theta_0}) = \{(u(\theta_0), \varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi[\} = \{u_0\} \times [0, 2\pi[$$

