FICHE TD 3 - SOUS-VARIÉTÉS

Exercice 1. Soit $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$ l'ensemble des entiers positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit L_n la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x = 1/n$. Posons $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} L_n \subset \mathbb{R}^2$.

(1) L'ensemble M est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

(2) Soit M_0 la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x = 0$ et posons $M' = M \cup M_0$. L'ensemble M' est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2. .

(1) Donner un exemple d'intersection de deux sous-variétés de $\mathbb{R}^3$ qui est une sous-variété.

(2) Donner un exemple d'intersection de deux sous-variétés de $\mathbb{R}^3$ qui *n'est pas* une sous-variété.

Exercice 3. .

(1) Pour quels valeurs de α l'ensemble $A_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = \alpha\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

(2) Pour quels valeurs de β l'ensemble $B_\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 = \beta\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. Les sous-ensembles suivants, sont-ils des sous-variétés ?

(1) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^5 - 3y^2 - z = 0\}$

(2) $S_2 = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 \mid xy^2 - u = 0,\ x^3 + 3yz - v = 0\}$

(3) $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy^2 - z = 0,\ x + y = 0\}$

Exercice 5. Les sous-ensembles suivants, sont-ils des sous-variétés ?

(1) La cubique $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 13 = 0\}$.

(2) La fenêtre de Viviani $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 - x = 0\}$.

Exercice 6. Considérons la sphère $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et le cylindre

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\right\}.$$

Quel est le sous-espace maximale de l'intersection $\mathbb{S}^2 \cap C$ qui forme une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 7. .

(1) Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ est-il une sous-variété de l'espace de matrices $M_n(\mathbb{R})$?

(2) Montrer que le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{R})$, des matrices inversibles de déterminant 1, est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. De quelle dimension ?

(3) Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$, des matrices A telles que ${}^tAA = 1$, est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. De quelle dimension ?

Exercice 8. Le support du cusp $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ pour $t \in \mathbb{R}$, est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$? Et si on prend $t \geq 0$? Et pour $t > 0$?

Exercice 9. Le support de la spirale logarithmique $\gamma(t) = e^{at}(\cos t, \sin t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 10. Trouver une paramétrisation locale de la courbe
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$$
au voisinage des points $(0, 0)$ et $(-1, 0)$.

Exercice 11. Soit $f(\theta, \varphi) = (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, \sin\theta)$ la paramétrisation en coordonnées sphériques de la sphère $\mathbb{S}^2$, pour $\pi/2 < \theta < \pi/2$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$.

(1) Montrer que $u = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ est un changement de paramètre et trouver le nouveau paramétrage $g(u, \varphi)$ de la sphère.

(2) Déterminer l'ensemble $g^{-1}(C)$, où C est un méridien ou un parallèle de la sphère.

Exercice 12. .

(1) Montrer que le tore, parametré par
$$f(u, v) = \big((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u\big),$$
est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

(2) Montrer que, si α est un nombre irrationnel, la courbe paramétrée
$$\gamma(t) = \big((2 + \cos t) \cos(\alpha t), (2 + \cos t) \sin(\alpha t), \sin t\big)$$
est partout dense sur le tore, et expliquer pourquoi ce n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.