

Fiche TD4 - Encore sous-variétés

Exo 1 Montrer que le n -tore $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_n$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^{2n}$.

Ceci est une conséquence d'un résultat plus général :

Lemme : Si $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ est une sous-var. de dim. k_1 et $M_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ est une sous-var. de dim. k_2 , alors $M_1 \times M_2$ est une sous-var. de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ de dim. k_1+k_2 .

Preuve : Puisque M_1 et M_2 sont des sous-var., $\forall (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ on a :

$\exists U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ voisinage de p_1 et $\exists F_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n_1-k_1}$ tq. $M_1 \cap U_1 = F_1^{-1}(c_1)$ où c_1 est val. rég. de F_1

$\exists U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ voisinage de p_2 et $\exists F_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2-k_2}$ tq. $M_2 \cap U_2 = F_2^{-1}(c_2)$ où c_2 est val. rég. de F_2 .

Posons $F = (F_1, F_2): U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{(n_1-k_1)+(n_2-k_2)} = \mathbb{R}^{(n_1+n_2)-(k_1+k_2)}$

$$(x_1, x_2) \longmapsto (F_1(x_1), F_2(x_2))$$

Alors $(M_1 \times M_2) \cap (U_1 \times U_2) = (M_1 \cap U_1) \times (M_2 \cap U_2) = F_1^{-1}(c_1) \times F_2^{-1}(c_2) = F^{-1}(c_1, c_2)$

et $\forall x = (x_1, x_2) \in F^{-1}(c_1, c_2)$ la matrice Jacobienne de $dF_x: \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{(n_1+n_2)-(k_1+k_2)}$ est

$$JF(x) = \begin{pmatrix} n_1-k_1 & \begin{matrix} JF_1(x_1) \\ \vdots \\ JF_1(x_1) \end{matrix} \\ \hline n_2-k_2 & \begin{matrix} JF_2(x_2) \\ \vdots \\ JF_2(x_2) \end{matrix} \end{pmatrix} \quad \text{avec rang} = \text{rk } JF_1(x_1) + \text{rk } JF_2(x_2)$$

$$= (n_1-k_1) + (n_2-k_2) = (n_1+n_2) - (k_1+k_2),$$

donc $c = (c_1, c_2)$ est une val. rég. de F et $M_1 \times M_2$ est une sous-var. de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ de dimension $(n_1+n_2) - [(n_1+n_2) - (k_1+k_2)] = k_1+k_2$. $\square$

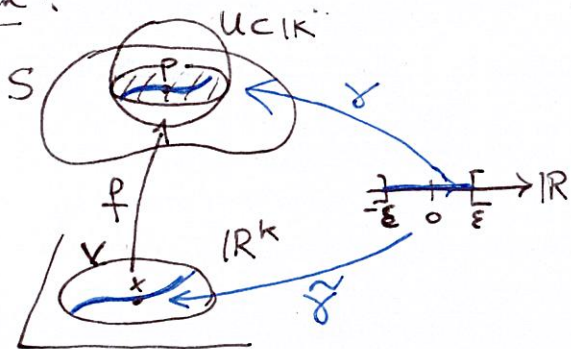
Par conséquent, puisque $\mathbb{S}^1$ est une sous-var. de $\mathbb{R}^2$ de dim. 1, le n -tore $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_n$ est une sous-var. de $\underbrace{\mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2}_n = \mathbb{R}^{2n}$ de dim. $\underbrace{1+\dots+1}_n = n$.

Exo 2 Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ sous-var. de dim. k . $T_p S = \{v = \gamma'(0) \in \mathbb{R}^n \mid \exists \gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S \text{ tq. } \gamma(0) = p\}$

(1) Supp. $\exists U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de p et $\exists f: V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U$ param. locale de S autour de p , i.e. f est immersion ($\text{rk}(df_x) = k \forall x \in V$) et homéo sur $f(V) = S \cap U$.

M.q. $T_p S = \text{Im}(df_x)$ où $x = \tilde{f}^{-1}(p)$ et déduire que $T_p S$ est un esp. vect.

Preuve :



• Toute courbe $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ tq. $\gamma(0) = p$ se factorise par $\tilde{\gamma}:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ tq. $\tilde{\gamma}(0) = x = \tilde{f}^{-1}(p)$, i.e. $\gamma = f \circ \tilde{\gamma}$.

• Alors $\gamma'(t) = df_{\tilde{\gamma}(t)} \circ \tilde{\gamma}'(t)$, où $\tilde{\gamma}(t) = (\tilde{\gamma}_1(t), \dots, \tilde{\gamma}_k(t)) \Rightarrow \tilde{\gamma}'(t) = (\tilde{\gamma}'_1(t), \dots, \tilde{\gamma}'_k(t))$.

Donc $T_p S = \{ \gamma'(0) = df_x(\tilde{\gamma}'(0)) \mid \tilde{\gamma}:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^k, \tilde{\gamma}(0) = x \}$

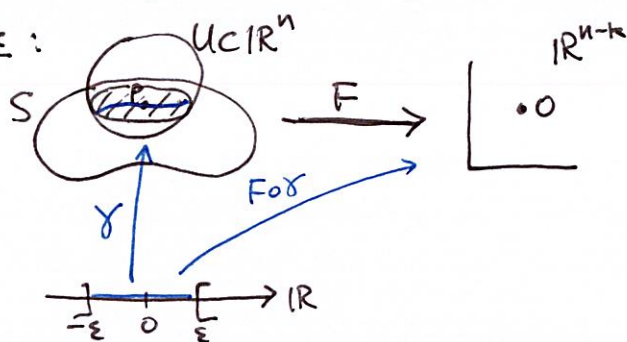
• Puisque $\text{Span}\{ \tilde{\gamma}'(0) \in \mathbb{R}^k \mid \forall \tilde{\gamma} \text{ tq. } \tilde{\gamma}(0) = x \} \cong \mathbb{R}^k = \text{Span}\{ e_i \mid i=1, \dots, k \}$ par l'isomorphisme $e_i \mapsto \tilde{\gamma}'_i(0)$ avec $\tilde{\gamma}'_i(t) = (x_1, \dots, x_i+t, \dots, x_k)$,

on a $T_p S = df_x(\mathbb{R}^k) = \text{Im}(df_x)$ est un esp. vect. de dim. $= \text{rk}(df_x) = k$. $\square$

(2) Supp. $\exists U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de p et $\exists F: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ t.q. $F^{-1}(0) = S \cap U$ et $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ est rel. rég. de F (ie. $\text{rk}(dF_x) = n-k \forall x \in F^{-1}(0)$).

M.q. $T_p S = \ker dF_p$.

Preuve :



• Montrons que $T_p S \subset \ker(dF_p)$:

$\forall \gamma'(0) \in T_p S$, on a :

$$dF_p(\gamma'(0)) = \left. \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \right|_{t=0} = 0 \text{ car}$$

$$\forall t: \gamma(t) \in S = F^{-1}(0) \Rightarrow F(\gamma(t)) = 0 \text{ const.}$$

Alors $\gamma'(0) \in \ker(dF_p)$.

• Puis : $\ker(dF_p)$ est sous-e.v. de $\mathbb{R}^n$ de $\dim = n - \text{rk}(dF_p) = n - (n-k) = k$.

Puisque $T_p S \subset \ker(dF_p)$ a aussi $\dim = k$, on a $T_p S = \ker(dF_p)$.

Exo 3 $S \subset \mathbb{R}^n$ sous-var. de $\dim k$, $TS = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in S, v \in T_p S\}$.

Supp. $S = F^{-1}(0)$ où $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ est submersif ($\text{rk } dF_x = n-k \forall x \in \mathbb{R}^n$).

M.q. TS est une sous-var. de $\dim 2k$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

Preuve : Par l'Exo 2 on sait que $T_p S = \ker dF_p \forall p \in S$, ie. $dF_p(T_p S) = \{0\}$.

• Posons $G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^{2n-2k}$

$$(x, y) \mapsto G(x, y) = (F(x), dF_x(y)).$$

• Alors on a $G^{-1}(0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x \in F^{-1}(0), y \in \ker(dF_x)\} = TS$,
 $\forall x \in S, y \in T_x S$

et $(0, 0)$ est une valeur rég. de G car $\forall (p, v) \in TS = G^{-1}(0, 0)$ on a :

$$JG(p, v) = \begin{pmatrix} JF(p) & \vdots \\ \hline \vdots & J(dF_p)(v) \end{pmatrix}$$

où la Jacobienne de dF_p se calcule comme différentielle de dF_p en v ,

et on a $d(dF_p)_v = dF_p$ constante p.r. à v car dF_p est linéaire

(preuve: $dF_p(v+h) - dF_p(v) = dF_p(h)$ car dF_p linéaire),

donc $\text{rk } JG(p, v) = \text{rk } JF(p) + \text{rk } JF(p) = 2(n-k)$,

• Conclusion : TS est une sous-var. de $\mathbb{R}^{2n}$ de $\dim = 2n - 2(n-k) = 2k$ $\square$.

Exo 4 $\mathbb{S}^2 = \text{sphère unité de } \mathbb{R}^3$, $SO(3) = \{A \in GL_3(\mathbb{R}) \mid A^t A = \mathbb{1}_3 \text{ et } \det A = 1\}$

(1) $\{e_1, e_2, e_3\}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

M.q. $\forall i=1,2,3$ l'application $SO(3) \rightarrow \mathbb{S}^2 : A \mapsto Ae_i$ est bien déf et lisse, puis m.q. $\{Ae_1, Ae_2, Ae_3\}$ est une base o.n. de $\mathbb{R}^3$.

Preuve: • L'application est bien déf ssi $Ae_i \in \mathbb{S}^2 \forall A \in SO(3)$: c'est le cas, car

$$\|Ae_i\|^2 = \langle Ae_i, Ae_i \rangle = \langle A^t Ae_i, e_i \rangle = \langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = 1.$$

• L'application est lisse, car en terme des elts de matrices a_{ij} de $A = (a_{ij})$ on a: $Ae_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix} =: A_i$ i-ème colonne, donc l'application est linéaire.

• Enfin, en termes des colonnes $[A_1 \ A_2 \ A_3] = A$, avec $A_i = Ae_i$, on a:

$$A \in SO(3) \Rightarrow A^t \cdot A = \begin{bmatrix} A_1^t \\ A_2^t \\ A_3^t \end{bmatrix} \cdot [A_1 \ A_2 \ A_3] = (A_i^t A_j) = \mathbb{1} \Leftrightarrow \begin{cases} A_i^t A_i = 1 \\ A_i^t A_j = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \langle Ae_i, Ae_j \rangle = \delta_{ij} \Leftrightarrow \{Ae_1, Ae_2, Ae_3\} \text{ est base o.n. de } \mathbb{R}^3.$$

(2) M.q. $S(T\mathbb{S}^2) = \{(p, v) \in T\mathbb{S}^2 \mid \|v\|^2 = 1\}$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^6$ de dim. 3.

Preuve: • D'après l'exo 3, puisque $\mathbb{S}^2 = F^{-1}(0)$ pour $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ avec val. rep. 0
 $p \mapsto \|p\|^2 - 1$ sur $F^{-1}(0)$,

$$\text{on a } T\mathbb{S}^2 = G^{-1}(0,0) \text{ avec } G: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(p, v) \mapsto (F(p), dF_p(v)) = (\|p\|^2 - 1, 2\langle p, v \rangle)$$

$$\text{où } F(p) = \|p\|^2 - 1 = \langle p, p \rangle - 1 \Rightarrow dF_p(v) = \langle p, v \rangle + \langle v, p \rangle = 2\langle p, v \rangle$$

• Posons alors $H: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ t.q. $S(T\mathbb{S}^2) = H^{-1}(0,0,0)$.
 $(p, v) \mapsto (\|p\|^2 - 1, 2\langle p, v \rangle, \|v\|^2 - 1)$

$$\text{Puisque } \mathcal{J}H(p, v) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}G(p, v) \\ \mathcal{J}F(v) \end{pmatrix} \text{ a rang} = 2+1 = 3 \text{ maximal,}$$

$$S(T\mathbb{S}^2) \text{ est une sous-variété de } \mathbb{R}^6 \text{ de dim.} = 6 - \text{rk } \mathcal{J}H(p, v) = 6 - 3 = 3.$$

(3) M.q. $S(T\mathbb{S}^2)$ est difféomorphe à $SO(3)$.

Preuve: L'applic. $SO(3) \rightarrow S(T\mathbb{S}^2)$ est bien déf car (1) dit que:
 $A \mapsto (Ae_1, Ae_2) = (A_1, A_2)$

• $A_1 \in \mathbb{S}^2$

• $A_2 \perp A_1$ donc $A_2 \in T_{A_1} \mathbb{S}^2$ et $\|A_2\| = 1$ donc $A_2 \in S(T_{A_1} \mathbb{S}^2)$.

De plus, d'après (1) l'applic. est lisse (car chaque composante l'est).

Enfin, elle est inversible avec inverse lisse $S(T\mathbb{S}^2) \rightarrow SO(3)$

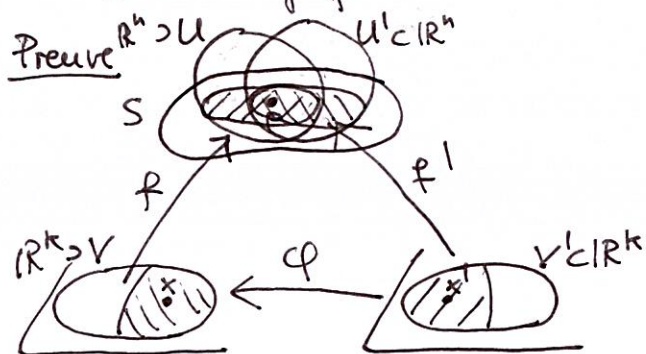
$$(p, v) \mapsto [p \mid v \mid p \wedge v]$$

où $p \wedge v$ est le produit vectoriel.

donc $\{p, v, p \wedge v\}$ est base o.n. de $\mathbb{R}^3$.

Exo 5 $S \subset \mathbb{R}^n$ sous-variété de dim k , $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ fonction.

- (1) Supp. g de classe C^1 parce qu $\forall p \in S \exists$ voisinage de $\mathbb{R}^n$ de p et $\exists f: V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U$ param. locale de S tq. $g \circ f: V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ est C^1 .
M.q. si $f': V' \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U'$ est une autre param. locale de S autour de p , alors $g \circ f'$ est aussi C^1 .



• Les deux param. locales
 $f: V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U \cap S \subset \mathbb{R}^n, x \mapsto p$
 $f': V' \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U' \cap S \subset \mathbb{R}^n, x' \mapsto p$
sont des homéos sur leur images et on peut les comparer leur restrictions à l'intersection $S \cap (U \cap U') \subset \mathbb{R}^n$:

- Posons: $\tilde{V} = f^{-1}(S \cap (U \cap U')) \subset V$, $\tilde{f} = f|_{\tilde{V}}: \tilde{V} \rightarrow S \cap (U \cap U')$ homéo C^1
 $\tilde{V}' = (f')^{-1}(S \cap (U \cap U')) \subset V'$, $\tilde{f}' = f'|_{\tilde{V}'}: \tilde{V}' \rightarrow S \cap (U \cap U')$ homéo C^1
• Alors $\exists$ C^1 -difféo $\varphi = \tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f}': \tilde{V}' \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^k$ changement de param.

et on a: g est $C^1 \stackrel{\text{diff}}{\iff} g \circ \tilde{f}$ est C^1

$$\iff g \circ \tilde{f}' = g \circ \tilde{f} \circ \tilde{f}'^{-1} \circ \tilde{f}' = (g \circ \tilde{f}) \circ \varphi \text{ est } C^1. \quad \square$$

- (2) M.q. si $p \in S$ est un point critique de g p.r. à la param. f , alors il l'est aussi p.r. à la param. f' .

Preuve: p pt critique de $g \stackrel{\text{diff}}{\iff} d(g \circ f)_x = 0$ où $x = \tilde{f}^{-1}(p)$

$$\iff d(g \circ \tilde{f})_x = 0 \text{ car } \tilde{f} = f|_{\tilde{V} \subset V}$$

$$\text{si } x' = (\tilde{f}')^{-1}(p): \iff d(g \circ \tilde{f}')_{x'} = d((g \circ \tilde{f}) \circ (\tilde{f}'^{-1} \circ \tilde{f}'))_{x'} = d(g \circ \tilde{f})_x \circ d\varphi_{x'} = 0 \quad \square$$

- (3) M.q. p est pt critique de g ssi $dg_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ s'annule sur $T_p S \subset \mathbb{R}^n$.

Preuve: D'après l'Exo 2, on sait que $T_p S = \text{Im } df_x$ où $x = \tilde{f}^{-1}(p)$.

Alors: p pt critique de $g \stackrel{\text{diff}}{\iff} 0 = d(g \circ f)_x(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^k$

$$= dg_{f(x)} \circ df_x(y)$$

$$= dg_p(v) \text{ où } v \in \text{Im}(df_x) = T_p S. \quad \square$$

Exo 6 Déterminer les minima et/ou maxima sur $\mathbb{S}^2$ des fcts suivantes.

Rappel: Thm des Multiplicateurs de Lagrange

Si $S = F^{-1}(c)$ où $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ est C^1 et tq $\text{rk}(dF_p) = n-k \forall p \in S$, $F = (F_1, \dots, F_{n-k})$ et $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est C^1 , alors:

$g|_S$ a un point critique en $p \in S \iff \nabla g(p) \in \text{Vect}\{\nabla F_1(p), \dots, \nabla F_{n-k}(p)\} \quad (*)$
i.e. $\nabla g(p) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \nabla F_i(p)$.

Preuve: $\forall \gamma: I \rightarrow S$, $\gamma(0) = p$, on a: $\frac{d}{dt}(g(\gamma(t)))|_{t=0} = \nabla g(p) \cdot \gamma'(0) = 0$ car p est pt critique de g , mais $\gamma'(0) \in T_p S$ donc $\nabla g(p) \perp T_p S$.
• $T_p S = \ker(dF_p)$ donc $\nabla F_i(p) \perp T_p S$ aussi. $\Rightarrow \nabla g(p) \in \text{Vect}\{\nabla F_i(p)\}_{i=1}^{n-k}$ $\square$

Résolution de l'exo: en amont, puisque $\mathbb{S}^2 = F^{-1}(0)$ où $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$,
calculons $\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$.

a) $g(x, y, z) = x + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}z^3 \Rightarrow \nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}$

$(*) \iff \exists \lambda \text{ tq. } \nabla g = \lambda \nabla F \iff \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda x \\ 2\lambda y \\ 2\lambda z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 1 = 2\lambda x \Rightarrow \lambda \neq 0 \text{ et } x \neq 0 \\ y = 2\lambda y \Rightarrow y(1-2\lambda) = 0 \\ z^2 = 2\lambda z \Rightarrow z(z-2\lambda) = 0 \end{cases}$
et $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

① $\begin{cases} x = \pm 1 \text{ avec } \lambda = \pm \frac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (1, 0, 0) \text{ et } (-1, 0, 0)$
sont pts critiques $\in \mathbb{S}^2$

② $\begin{cases} x = 1 \\ \lambda = \frac{1}{2} \forall y \Rightarrow y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} x = 1 \\ \lambda = \frac{1}{2} \forall y \Rightarrow (1, y, 1) \notin \mathbb{S}^2 \forall y \\ \lambda = \frac{z}{2} \Rightarrow z = 1 \end{cases}$

④ $\begin{cases} 1 = xz \\ y = 0 \\ \lambda = \frac{z}{2} \end{cases}$ imp. sur $\mathbb{S}^2$

Donc on a deux points critiques $(1, 0, 0)$ et $(-1, 0, 0)$ sur $\mathbb{S}^2$
avec $g(1, 0, 0) = 1$ et $g(-1, 0, 0) = -1$.

Puisque $\mathbb{S}^2$ est compacte, il existe certainement un point de maximum global et un point de minimum local, qui sont des points critiques.

Ici on a exactement deux pts crit, ils sont donc ce max et min globaux: $(1, 0, 0)$ est pt. de max et $(-1, 0, 0)$ est pt de min.

c) $g(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \Rightarrow \nabla g = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-2) \\ 2(z-3) \end{pmatrix}$

$(*) \iff \begin{cases} x-1 = \lambda x \\ y-2 = \lambda y \\ z-3 = \lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x(1-\lambda) = 1 \\ y(1-\lambda) = 2 \\ z(1-\lambda) = 3 \\ \frac{1+y+z}{(1-\lambda)^2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1/\sqrt{14} \\ y = \pm 2/\sqrt{14} \\ z = \pm 3/\sqrt{14} \end{cases} \rightsquigarrow 2 \text{ pts critiques}$
 $\pm \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3) = P_{\pm}$

• $g(P_{\pm}) = \left\| \left(\pm \frac{1}{\sqrt{14}} - 1 \right) (1, 2, 3) \right\|^2 = \left| \pm \frac{1}{\sqrt{14}} - 1 \right|^2 \underbrace{\| (1, 2, 3) \|^2}_{14} \Rightarrow \frac{g(P_+)}{14} = \left| 1 - \frac{1}{\sqrt{14}} \right|^2 < \left| 1 + \frac{1}{\sqrt{14}} \right|^2 = \frac{g(P_-)}{14}$

$\Rightarrow P_+$ est le min. global (pt plus proche) et P_- est le max global (pt plus éloigné).

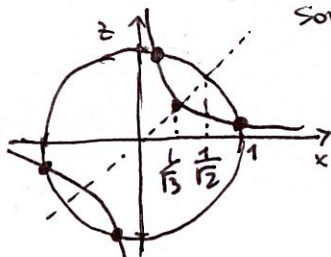
$$b) q(x,y,z) = x + y^2 + z^3 \Rightarrow \nabla q(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \\ 3z^2 \end{pmatrix}$$

$$(*) \Leftrightarrow \exists \lambda \text{ tq } \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ 3z^2 = 2\lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x \Rightarrow \lambda, x \neq 0 \\ y(1-\lambda) = 0 \\ z(3z-2\lambda) = 0 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow y=0 \text{ (1)} \\ \leftarrow \lambda=1 \text{ (2)} \\ \leftarrow z=0 \text{ (3)} \\ \leftarrow \lambda=\frac{3}{2}z \text{ (4)} \end{matrix}$$

plus $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\textcircled{1} \begin{cases} x = \pm 1 \text{ avec } \lambda = \pm \frac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (1, 0, 0) \text{ et } (-1, 0, 0) \text{ sont pts critiques.}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 1 = 3xz \\ y = 0 \\ \lambda = \frac{3}{2}z \end{cases} \Rightarrow \exists 4 \text{ sol. à } \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ 3xz = 1 \end{cases} \begin{cases} x^2 + \frac{1}{3x^2} = 1 \\ z = \frac{1}{3x} \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow 9x^4 - 9x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (3x^2)^2 - 3(3x^2) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{6}} \\ z = \pm \sqrt{\frac{2}{3(3 \pm \sqrt{5})}} \end{cases} \text{ on a 4 pts critiques de plus}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \lambda = 1 + y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \text{ 2 pts critiques}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \lambda = 1 + y \\ z = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} + y^2 + \frac{4}{9} = \frac{9 + 36y^2 + 16}{36} = \frac{36y^2 + 25}{36} = 1 \Leftrightarrow 36y^2 + 25 = 36 \Leftrightarrow y^2 = \frac{11}{36}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{11}}{6} \text{ sur 2 pts critiques } \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{2}{3} \right).$$

• On a $q(1, 0, 0) = 1$, $q(-1, 0, 0) = -1$

$$\begin{aligned} \bullet q\left(\pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{6}}, 0, \pm \sqrt{\frac{2}{3(3 \pm \sqrt{5})}}\right) &= \pm \frac{\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}}{\sqrt{6}} \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3(3 \pm \sqrt{5})}} \cdot \frac{2}{3(3 \pm \sqrt{5})} = \pm \frac{3(3 \pm \sqrt{5})^2 + 2 \cdot 2}{3\sqrt{6}(3 \pm \sqrt{5})\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}} \\ &= \pm \frac{\sqrt{3(9 \pm 6\sqrt{5} + 5) + 4}}{3\sqrt{6}(3 \pm \sqrt{5})\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}} = \pm \frac{6(3 \pm \sqrt{5})}{\sqrt{6}(3 \pm \sqrt{5})^{3/2}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}} \end{aligned}$$

Or: $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}} > 1$ car $6 > 3 \pm \sqrt{5}$ et $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3 - \sqrt{5}}} > \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}$

De même: $-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}} < -1$ et $-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3 - \sqrt{5}}} < -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}$.

• $q\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{11}{36} + \frac{4}{9} = \frac{18 + 11 + 16}{36} = \frac{45}{36} = \frac{5}{4}$

et finalement $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3 - \sqrt{5}}} > \frac{5}{4}$ car $4\sqrt{6} > 5\sqrt{3 - \sqrt{5}} \Leftrightarrow 16 \times 6 > 25 \times 3 - 25\sqrt{5} \Leftrightarrow 96 - 75 > 0 > -25\sqrt{5}$.

Conclusion: parmi les 2+4+2 pts critiques,

le max. global est $\left(\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3(3 - \sqrt{5})}}\right)$

le min. global est $\left(-\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}}, 0, -\sqrt{\frac{2}{3(3 - \sqrt{5})}}\right)$.

Pour les autres, ils peuvent être des min/max locaux ou des pts d'inflexion... j'abandonne.