

FICHE TD 4 - ESPACES TANGENTS ET EXTREMA LIÉS

Exercice 1. Soit $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ le cercle unitaire. Montrer que le **n -tore**

$$T^n := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_n$$

est une sous-variété lisse de dimension n de $\mathbb{R}^{2n}$.

Exercice 2. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k . L'**espace tangent à S en un point $p \in S$** est l'ensemble des vecteurs tangents en p aux courbes de S passant par p , i.e. l'ensemble

$$T_p S = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \text{ courbe paramétrée } \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S \text{ avec } \gamma(0) = p \text{ et } \gamma'(0) = v\}.$$

- (1) Supposons que localement, autour de p , la sous-variété S soit donné par une paramétrisation locale f , c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ de p , un ouvert $V \subset \mathbb{R}^k$ et un plongement $f : V \rightarrow U$ de classe C^1 tel que $f(V) = S \cap U$. Montrer que

$$T_p S = \text{Im } df_x,$$

où $x = f^{-1}(p) \in V$. Dédurre que $T_p S$ est un espace vectoriel de dimension k .

- (2) Supposons que localement, autour de p , la sous-variété S soit le lieu des zéros d'une application F , c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ de p et une application $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^1 qui a 0 comme valeur régulière et telle que $F^{-1}(0) = S \cap U$. Montrer que

$$T_p S = \ker dF_p.$$

Exercice 3. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k . Le **fibré tangent de S** est l'ensemble de tous les vecteurs tangents à S , i.e. l'ensemble

$$TS = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in S, v \in T_p S\}.$$

Montrer que si $S = F^{-1}(0)$ est le lieu des zéros d'une submersion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, alors TS est une sous-variété de dimension $2k$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

Exercice 4. Soient $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère unité et $SO(3)$ le groupe spécial orthogonal.

- (1) Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que, pour tout $i = 1, 2, 3$, l'application

$$SO(3) \rightarrow \mathbb{S}^2, A \mapsto Ae_i$$

est bien définie et lisse, puis montrer que $\{Ae_1, Ae_2, Ae_3\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

- (2) Le **fibré unitaire tangent** de $\mathbb{S}^2$ est le sous-ensemble des vecteurs tangent à $\mathbb{S}^2$ qui ont longueur 1, i.e. l'ensemble

$$S(T\mathbb{S}^2) = \{(p, v) \in T\mathbb{S}^2 \mid \|v\| = 1\}.$$

Montrer que $S(T\mathbb{S}^2)$ est une sous-variété lisse de dimension 3 dans $\mathbb{R}^6$.

- (3) Montrer que $S(T\mathbb{S}^2)$ est difféomorphe à $SO(3)$.

Exercice 5. Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété C^1 de dimension k et $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- (1) La fonction g est **de classe** C^1 si autour de tout point $p \in S$ il existe une paramétrisation locale $f : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ de S de classe C^1 et telle que la composée $g \circ f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 . Montrer que localement (autour de tout point p), si g est de classe C^1 par rapport à une paramétrisation locale alors elle l'est par rapport à toute paramétrisation locale.
- (2) Un point $p \in S$ est un **point critique de** g s'il existe une paramétrisation locale $f : V \rightarrow U$ de S autour de p tel que tous les dérivées partielles de $g \circ f$ s'annulent en $x = f^{-1}(p)$. Montrer que si p est un point critique de g par rapport à une paramétrisation locale, alors il l'est par rapport à toute paramétrisation locale.
- (3) Montrer que $p \in S$ est un point critique de g si et seulement si la différentielle $dg_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ s'annule sur $T_p S$.

Exercice 6. Déterminer le minimum et/ou maximum sur la sphère $\mathbb{S}^2$ des fonctions $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

1) $g(x, y, z) = x + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}z^3$

2) $g(x, y, z) = x + y^2 + z^3$

3) $g(x, y, z) = \text{dist}\left((x, y, z), (1, 2, 3)\right)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2.$