

Fiche TD 5 - Variétés

Exo 1 M et M' variétés diff. de dim. n et n' (de classe C^r , $r \geq 0$ ou $r = \infty$).
M.q. $M \times M'$ est une variété de dim $n+n'$.

Preuve: • Puisque M et M' sont séparées et paracompactes, $M \times M'$ l'est aussi.

• Atlas: $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' = \left\{ (U_\alpha \times U'_{\alpha'}, \varphi_\alpha \times \varphi'_{\alpha'}) \mid \begin{array}{l} (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A} \text{ atlas de } M \\ (U'_{\alpha'}, \varphi'_{\alpha'}) \in \mathcal{A}' \text{ atlas de } M' \end{array} \right\}$

$$\varphi_{\text{ddl}} := \varphi_\alpha \times \varphi'_{\alpha'} : U_\alpha \times U'_{\alpha'} \subset M \times M' \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'}$$

$$(p, p') \longmapsto (\varphi_\alpha(p), \varphi'_{\alpha'}(p'))$$

• Ceci est bien un atlas de classe C^r , car les changements de cartes sur une intersection non vide

$$(U_\alpha \times U'_{\alpha'}) \cap (U_\beta \times U'_{\beta'}) = \underbrace{(U_\alpha \cap U_\beta)}_{U_{\alpha\beta}} \times \underbrace{(U'_{\alpha'} \cap U'_{\beta'})}_{U'_{\alpha'\beta'}}$$

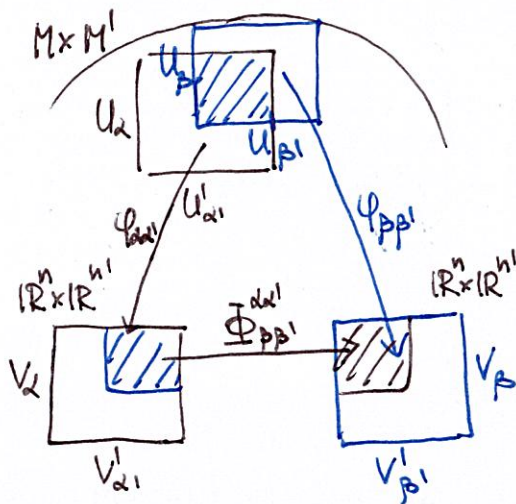
sont donnés par

$$\Phi_{\beta\beta'}^{\text{ddl}} = \varphi_{\beta\beta'} \circ \varphi_{\alpha\alpha'}^{-1} : \varphi_{\text{ddl}}(U_{\alpha\beta}) \longrightarrow \varphi_{\beta\beta'}(U_{\alpha\beta}) \subset \mathbb{R}^{n+n'}$$

$$(x, x') \longmapsto (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x), \varphi'_{\beta'} \circ (\varphi'_{\alpha'})^{-1}(x'))$$

et donc sont de classe C^r car chaque composant l'est.

• En conclusion, $M \times M'$ est bien une variété de dimension $n+n'$.

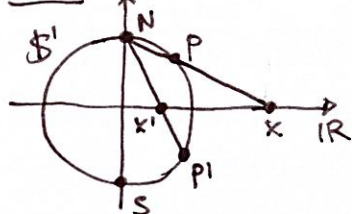


Exo 2

(1) $\mathbb{S}^1 = \{ p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| = 1 \}$ est sous-var. de $\mathbb{R}^2$, donc variété diff.

M.q. les deux proj. stéréographiques forment un atlas de $\mathbb{S}^1$.

Preuve:



$\mathcal{A} = \{ (U_N, \pi_N), (U_S, \pi_S) \}$ avec

$$\pi_N : U_N = \mathbb{S}^1 \setminus \{(0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(p_1, p_2) \longmapsto x = \frac{p_1}{1-p_2} \quad \text{bien déf car } p_2 \neq 1$$

$$\pi_S : U_S = \mathbb{S}^1 \setminus \{(0, -1)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(p_1, p_2) \longmapsto y = \frac{p_1}{1+p_2} \quad \text{bien déf car } p_2 \neq -1$$

• On a $U_N \cup U_S = \mathbb{S}^1$ donc $\{U_N, U_S\}$ est un recouvrement d'ouverts.

• Les cartes π_N et π_S sont continues, avec image $\mathbb{R}$ et inversibles:

$$x = \frac{p_1}{1-p_2} \text{ et } p_1^2 + p_2^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{p_1^2}{(1-p_2)^2} = \frac{1-p_2^2}{(1-p_2)^2} = \frac{1+p_2}{1-p_2} \Rightarrow (1-p_2)x^2 = 1+p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$\text{donc } 1-p_2 = \frac{x^2+1-x^2+1}{x^2+1} = \frac{2}{x^2+1} \Rightarrow p_1 = (1-p_2)x = \frac{2x}{x^2+1}$$

Conclusion: $\pi_N^{-1}(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1} \right)$
et de même $\pi_S^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2} \right)$ } bien déf et continues $\Rightarrow$ les cartes sont des homéos.

- Changement de cartes: $U_N \cap U_S = \mathbb{S}^1 \setminus \{N, S\}$.

Puisque $\pi_N(0, -1) = 0$ et $\pi_S(0, 1) = 0$, on a $\pi_N(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^* = \pi_S(U_N \cap U_S)$.

Donc $\varphi_S^N: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*: x \mapsto y = \varphi_S^N(x)$ est donné par

$$y = \varphi_S^N(x) = \pi_S(\pi_N^{-1}(x)) = \pi_S\left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \frac{2x}{x^2+1+x^2-1} = \frac{2x}{2x^2} = \frac{1}{x} \text{ difféo.}$$

- Comparaison entre la structure diff de $\mathcal{A}$ et celle de $\mathbb{S}^1$ comme sous-vari. de $\mathbb{R}^2$, donnée par les paramétrisations loc $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$:

$$U_N \subset \tilde{U}_N = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, p_2) \mid p_2 \geq 0\} \quad \psi_N(\theta) = \pi_N(\gamma(\theta)) = \pi_N(\cos \theta, \sin \theta) = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = x$$

est bien un difféo $\forall \theta \neq \frac{\pi}{2}$ avec inverse

$$\theta = \theta(x) \text{ tq } \begin{cases} \cos \theta = \frac{2x}{x^2+1} \\ \sin \theta = \frac{x^2-1}{x^2+1} \end{cases}$$

$$\left] \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi \right[\xrightarrow{\psi_N} \mathbb{R}$$

- (2) Donner un atlas pour le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} = \{(p_1, p_2, z) \in \mathbb{R}^3 \mid p_1^2 + p_2^2 = 1\}$.

- $\mathcal{A} = \{(U_N \times \mathbb{R}, \pi_N \times \text{id}), (U_S \times \mathbb{R}, \pi_S \times \text{id})\}$ est un bon atlas, car

- $\{U_N \times \mathbb{R}, U_S \times \mathbb{R}\}$ est un recouvrement de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$

- les cartes $\pi_N \times \text{id}: U_N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, (p_1, p_2, z) \mapsto \left(\frac{p_1}{1-p_2}, z\right)$
 $\pi_S \times \text{id}: U_S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, (p_1, p_2, z) \mapsto \left(\frac{p_1}{1+p_2}, z\right)$

sont des homéomorphismes

- le chmt de carte $\Phi_S^N: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, (x, z) \mapsto \left(\frac{1}{x}, z\right)$ est un difféo lisse avec inverse $\Phi_N^S: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, (y, z) \mapsto \left(\frac{1}{y}, z\right)$. $\square$

- (3) Donner un atlas pour le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, puis montrer qu'il est difféomorphe au tore de révolution $\mathbb{T}_{\text{rev}}^2 = \left\{ f(\varphi, \theta) = R_\varphi^{\text{rev}} \begin{pmatrix} 2 + \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix} \mid \theta, \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$.

- Sur $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ on a un atlas formé de quatre cartes, les produits cartésiens des deux cartes de $\mathbb{S}^1$:

$$\mathcal{A} = \{(U_{NN} = U_N \times U_N, \pi_{NN} = \pi_N \times \pi_N), (U_{NS} = U_N \times U_S, \pi_{NS} = \pi_N \times \pi_S), \text{ etc } \},$$

où $\pi_{NN}(p, q) = \left(\frac{p_1}{1-p_2}, \frac{q_1}{1-q_2}\right) = (x_1, x_2)$ bien déf $\forall p_2 \neq 1, q_2 \neq 1$

$\pi_{NS}(p, q) = \left(\frac{p_1}{1-p_2}, \frac{q_2}{1+q_2}\right) = (x_1, y_2)$ bien déf $\forall p_2 \neq 1, q_2 \neq -1$ etc

sont bien des homéomorphismes avec inverses comme pour $\mathbb{S}^1$,

$$\text{ex. } \pi_{NN}^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2+1}, \frac{x_1^2-1}{x_1^2+1}, \frac{2x_2}{x_2^2+1}, \frac{x_2^2-1}{x_2^2+1}\right) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

$$\pi_{NS}^{-1}(x_1, y_2) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2+1}, \frac{x_1^2-1}{x_1^2+1}, \frac{2y_2}{1+y_2^2}, \frac{1-y_2^2}{1+y_2^2}\right) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \text{ etc}$$

et changements de cartes sur toutes les intersections de deux cartes à la fois, par exemple:

$$\phi_{NS}^{NN} : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* : (x_1, x_2) \longmapsto (x_1, y_2) = (x_1, \frac{1}{x_2})$$

$$\phi_{SN}^{NN} (x_1, x_2) = (y_1, x_2) = (\frac{1}{x_1}, x_2)$$

$$\phi_{SS}^{NN} (x_1, x_2) = (y_1, y_2) = (\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2})$$

$$\phi_{SN}^{NS} (x_1, y_2) = (y_1, x_2) = (\frac{1}{x_1}, \frac{1}{y_2}) \text{ etc.}$$

En conclusion $\mathbb{T}^2$ est bien une variété diff. (lisse) de dim. 2.

- Montrons que $\mathbb{T}^2$ est difféomorphe au tore de révolution $\mathbb{T}_{rev}^2$, donné par des paramétrisations locales de la forme

$$f:]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\times]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3, (\theta, \varphi) \longmapsto f(\theta, \varphi) = R_\varphi \begin{pmatrix} 2 + \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Pour cela, on introduit aussi des paramétrisations locales de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, en utilisant le param. $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ du cercle, pour $\theta \in]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$

Pour tout choix de (θ_0, φ_0) , les deux paramétrisations locales couvrent le tore moins deux cercles, et sont des plongements :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 & & \mathbb{T}_{rev}^2 \\ \gamma \times \gamma \nearrow & f \nearrow & \\]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\times]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[& & \end{array}$$

des immersions injectives et homéomorphismes sur leur image $U \subset \mathbb{T}^2$.

- Puisque f et $\gamma \times \gamma$ sont toutes les deux périodiques, on peut les prolonger à l'ensemble $[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$: l'image de prolongements $\tilde{f}$ et $\tilde{\gamma \times \gamma}$ couvre entièrement les tores, et les prolongements sont encore des homéomorphismes.

L'application $g = \tilde{f} \circ (\tilde{\gamma \times \gamma})^{-1}$ est donc un homéomorphisme de $\mathbb{T}^2$ vers $\mathbb{T}_{rev}^2$.

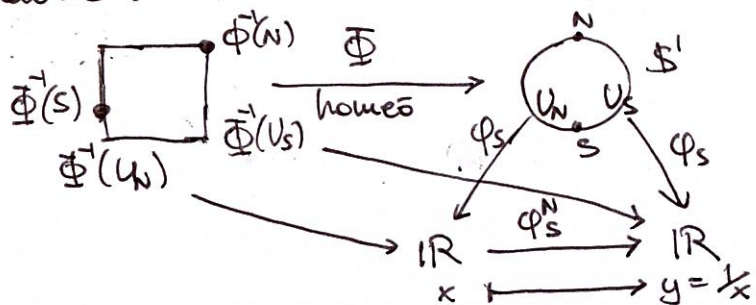
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{T}_{rev}^2 \\ \tilde{\gamma \times \gamma} \nearrow & \tilde{f} \nearrow & \\ [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[& & \end{array}$$

- Enfin, g est un difféomorphisme, car pour vérifier que g et g^{-1} sont différentiables (même lisses) il suffit de le dire dans des cartes locales. Ici, les applications inverses des paramétrisations sont des cartes locales : $\tilde{f}^{-1} \circ g \circ (\tilde{\gamma \times \gamma})$ et $(\tilde{\gamma \times \gamma})^{-1} \circ g^{-1} \circ \tilde{f}$ sont l'identité de $] \theta_0, \theta_0 + 2\pi[\times] \varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[$ vers lui-même, donc des difféos. Pour couvrir tout le tore il suffit de considérer deux valeurs distinctes de θ_0 et deux de φ_0 , donc quatre cartes locales. Puisque $\gamma \times \gamma$ et f sont périodiques, la valeur de g ne change pas sur les différentes cartes. $\square$

Exo3. Exemple d'une variété diff. qui n'est pas une sous-variété :

le carré (vide) $\square \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas une sous-variété à cause des angles,

mais il est homéomorphe au cercle $S^1 = \bigcirc$ qui est une variété, donc il hérite la structure diff. de S^1 :

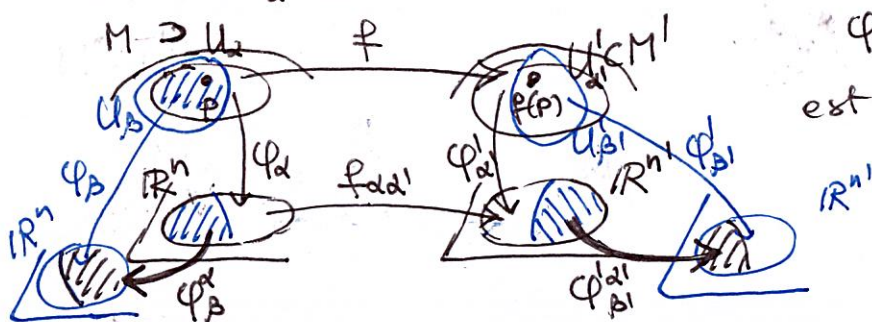


$$\begin{aligned} \exists \tilde{\phi}_N^s: \Phi^{-1}(U_N) &\rightarrow \mathbb{R}, \tilde{\phi}_N^s = \phi_N^s \circ \Phi \\ \tilde{\phi}_S^s: \Phi^{-1}(U_S) &\rightarrow \mathbb{R}, \tilde{\phi}_S^s = \phi_S^s \circ \Phi \\ \text{t.q. } \tilde{\phi}_S^N &= \tilde{\phi}_S^s \circ \tilde{\phi}_N^{-1} = \phi_S^s \circ \Phi \circ \Phi^{-1} \circ \phi_N^{-1} \\ &= \phi_S^s \circ \phi_N^{-1} \text{ lisse.} \end{aligned}$$

Exo4 M, M' var. C^r de dim n, n' .

M.i.q. si $f: M \rightarrow M'$ est une application C^r par rapport à un choix de cartes locales, alors elle est C^r par rapport à tout autre choix.

Preuve: Supposons que $\forall p \in M \exists$ carte locale (U_α, ϕ_α) de M autour de p et $\exists (U'_{\alpha'}, \phi'_{\alpha'})$ carte locale de M' autour de $f(p)$ t.q.



$\phi'_{\alpha'} \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}: \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \phi'_{\alpha'}(U'_{\alpha'}) \subset \mathbb{R}^{n'}$ est de classe C^r .

- Preions une autre carte locale (U_β, ϕ_β) autour de p et $(U'_{\beta'}, \phi'_{\beta'})$ autour de $f(p)$. Alors sur l'intersection $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \exists \phi_\beta^\alpha = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}: \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \phi_\beta(U_{\alpha\beta})$ difféo C^r et sur $U'_{\alpha'\beta'} = U'_{\alpha'} \cap U'_{\beta'} \exists \phi_{\beta'}^{\alpha'} = \phi'_{\beta'} \circ (\phi'_{\alpha'})^{-1}: \phi'_{\alpha'}(U'_{\alpha'\beta'}) \rightarrow \phi'_{\beta'}(U'_{\alpha'\beta'})$ difféo C^r .
- Considérons un voisinage U de p t.q. $U \subset U_{\alpha\beta}$ et $f(U) \subset U'_{\alpha'\beta'}$. Alors on peut considérer la restriction de ϕ_β^α à $\phi_\alpha(U)$, notée $\tilde{\phi}$, et celle de $\phi_{\beta'}^{\alpha'}$ à $\phi'_{\alpha'}(f(U))$, notée $\tilde{\phi}'$, et on a:

$$f \text{ est } C^r \iff \phi'_{\alpha'} \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} \text{ est } C^r$$

$$\iff \phi'_{\alpha'}|_{f(U)} \circ f \circ \phi_\alpha|_U^{-1} \text{ est } C^r$$

$$\iff \phi'_{\beta'}|_{f(U)} \circ f \circ \phi_\beta|_U^{-1} = (\tilde{\phi}' \circ \phi'_{\alpha'}|_{f(U)}) \circ f \circ (\tilde{\phi} \circ \phi_\alpha|_U)^{-1} = \tilde{\phi}' \circ (\phi'_{\alpha'}|_{f(U)} \circ f \circ \phi_\alpha|_U^{-1}) \circ \tilde{\phi}^{-1} \text{ est } C^r$$



Exo 5 Sphère $S^n = \{ p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$
avec topologie induite.

(1) Pôle nord $N = (0, \dots, 1)$, pôle sud $S = (0, \dots, -1)$, $E = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0 \}$

Projections stéréographiques sur E :

$\pi_N: U_N = S^n \setminus \{N\} \rightarrow E: p \mapsto x = \text{point de la droite } \overline{Np} \text{ appartenant à } E$

$\pi_S: U_S = S^n \setminus \{S\} \rightarrow E: p \mapsto y = \text{point de la droite } \overline{Sp} \text{ appartenant à } E$

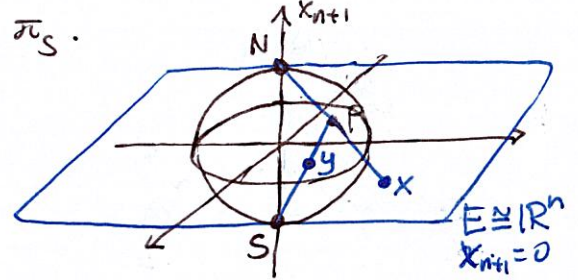
M.g. S^n est une variété diff. avec atlas $\mathcal{A} = \{ (U_N, \pi_N), (U_S, \pi_S) \}$.

Preuve: D'abord calculons l'expression de π_N et π_S .

$$\pi_N(p) = x \text{ t.q. } \begin{cases} x - N = \lambda(p - N), \lambda \in \mathbb{R}^* \\ x \in E, \text{ i.e. } x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = N + \lambda(p - N) = (0, \dots, 1) + \lambda(p_1, \dots, p_{n+1} - 1) \\ \quad = (\lambda p_1, \dots, 1 + \lambda(p_{n+1} - 1)) \\ x_{n+1} = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda(p_{n+1} - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1 - p_{n+1}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi_N(p) = x = \frac{1}{1 - p_{n+1}} (p_1, \dots, p_n) \quad \forall p_{n+1} \neq 1$$



De même: $\pi_S(p) = y = \frac{1}{1 + p_{n+1}} (p_1, \dots, p_n) \quad \forall p_{n+1} \neq -1$

Donc π_N et π_S sont bien définies et continues.

Réciproques: posons $\tilde{p} = (p_1, \dots, p_n)$ t.q. $p = (\tilde{p}, p_{n+1})$.

$$x = \frac{\tilde{p}}{1 - p_{n+1}} \text{ et } \|\tilde{p}\|^2 = 1 - p_{n+1}^2 \Rightarrow \|x\|^2 = \frac{\|\tilde{p}\|^2}{(1 - p_{n+1})^2} = \frac{1 - p_{n+1}^2}{(1 - p_{n+1})^2} = \frac{1 + p_{n+1}}{1 - p_{n+1}} \Rightarrow p_{n+1} = \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}$$

$$\hookrightarrow \tilde{p} = x(1 - p_{n+1}) = x \frac{\|x\|^2 + 1 - (\|x\|^2 - 1)}{\|x\|^2 + 1} = \frac{2x}{\|x\|^2 + 1}$$

$$\text{Donc } \pi_N^{-1}(x) = p = (\tilde{p}, p_{n+1}) = \frac{1}{\|x\|^2 + 1} (2x, \|x\|^2 - 1)$$

$$\text{et de même } \pi_S^{-1}(y) = p = (\tilde{p}, p_{n+1}) = \frac{1}{1 + \|y\|^2} (2y, 1 - \|y\|^2).$$

Les deux réciproques sont bien déf. et continues, donc π_N et π_S sont des homéomorphismes.

• Changement de cartes: $U_N \cap U_S = S^n \setminus \{N, S\} = \{p \in S^n \mid p_{n+1} \neq \pm 1\}$

$$\pi_N(U_N \cap U_S) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \neq 0\} \text{ et } \pi_S(U_N \cap U_S) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \neq 0\}$$

$\varphi_S^N: \pi_N(U_N \cap U_S) \rightarrow \pi_S(U_N \cap U_S)$ est donnée par:

$$\begin{aligned} x \mapsto \varphi_S^N(x) = y &= \pi_S(\pi_N^{-1}(x)) = \pi_S\left(\frac{2x}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}\right) = \frac{1}{1 + \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}} \cdot \frac{2x}{\|x\|^2 + 1} \\ &= \frac{2x}{\|x\|^2 + 1 + \|x\|^2 - 1} = \frac{x}{\|x\|^2} \end{aligned}$$

qrr est bien un difféo sur $(\mathbb{R}^n)^*$ avec inverse $y \mapsto x$ donnée par:

$$\|y\|^2 = \frac{\|x\|^2}{\|x\|^4} = \frac{1}{\|x\|^2} \Rightarrow y = \frac{x}{\|x\|^2} = x \cdot \|y\|^2 \Rightarrow x = \frac{y}{\|y\|^2} \quad \square$$

(2) M.q. l'inclusion canonique $i: \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est lisse.

M.q. si M est une variété C^r -diff, $f: M \rightarrow \mathbb{S}^n$ est C^r ssi $i \circ f$ l'est.

Déduire qu'il existe une inclusion lisse de $\mathbb{S}^p$ dans $\mathbb{S}^{p+n} \forall p \geq 1$.

- L'inclusion $i: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est lisse ssi $i \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est lisse pour toute carte locale φ de $\mathbb{S}^n$.

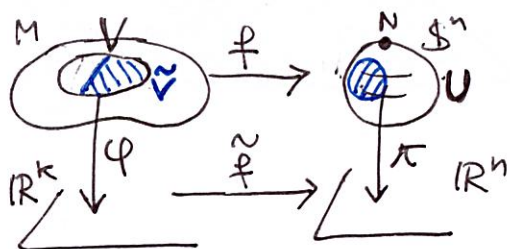
Sur $U_N \subset \mathbb{S}^n$, on a $i \circ \pi_N^{-1}(x) = \frac{1}{\|x\|^2+1} (2x, \|x\|^2-1)$ lisse

et sur $U_S \subset \mathbb{S}^n$ on a $i \circ \pi_S^{-1}(y) = \frac{1}{1+\|y\|^2} (2y, 1-\|y\|^2)$ lisse.

- Soit $\mathcal{A}_M = \{(V_i, \varphi_i)\}$ un atlas de la variété M de dimension k .

Pai déf, une application $f: M \rightarrow \mathbb{S}^n$ est de classe C^r ssi

$\forall$ carte (V, φ) de M et $\forall$ carte (U, π) de $\mathbb{S}^n$
t.q. $f(V) \cap U \neq \emptyset$, l'application



$\tilde{f} = \pi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(\tilde{V}) \rightarrow \pi(f(\tilde{V}))$ est C^r ,
où $\tilde{V} = \varphi^{-1}(f(V) \cap U)$.

De l'autre côté, $i \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est C^r ssi $\forall$ carte (V, φ) de M

l'application $i \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est C^r

Or, pour $(U, \pi) = (U_N, \pi_N)$ ou (U_S, π_S) sur $\mathbb{S}^n$, et modulo la restriction à $\tilde{V} \subset V$, on a:

$$i \circ f \circ \varphi^{-1} = i \circ \pi^{-1} \circ \pi \circ f \circ \varphi^{-1} = (i \circ \pi^{-1}) \circ \tilde{f} \text{ où } i \circ \pi^{-1} \text{ est lisse.}$$

Donc: f est $C^r \iff \tilde{f}$ est $C^r \iff i \circ f \circ \varphi^{-1}$ est $C^r \iff i \circ f$ est C^r .

- Considérons trois inclusions lisses:

$$i_p: \mathbb{S}^p \hookrightarrow \mathbb{R}^p, \quad i_{p+n}: \mathbb{S}^{p+n} \hookrightarrow \mathbb{R}^{p+n}$$

$$\text{et } j: \mathbb{R}^p \hookrightarrow \mathbb{R}^{p+n}.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \xhookrightarrow{j} & \mathbb{R}^{p+n} \\ i_p \uparrow & j \circ i_p \nearrow & \uparrow i_{p+n} \\ \mathbb{S}^p & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^{p+n} \end{array}$$

Alors la composée $j \circ i_p: \mathbb{S}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p+n}$ est lisse, et son image est contenue dans $\mathbb{S}^{p+n}$: il existe une application $f: \mathbb{S}^p \rightarrow \mathbb{S}^{p+n}$ t.q. $j \circ i_p = i_{p+n} \circ f$.

Or, $j \circ i_p$ est injective car composée de deux applications injectives, et donc f est aussi injective.

Enfin f est lisse car $f \circ i_{p+n} = j \circ i_p$ est lisse. $\square$

Exo 6 M var. diff (C^r) de dim. n , G groupe discret, $G \times M \rightarrow M$ action diff, libre, propre.

M.q. M/G est une variété diff (C^r) de dim n , et $\pi: M \rightarrow M/G$ est difféo local.

Preuve:

- M/G = espace des orbites = $\{[x] | x \in M\}$ où $[x] \equiv Gx = \{gx \in M | g \in G\}$ est l'orbite de $x \in M$.

Notons que $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists z = g_1 x = g_2 y \in M \Leftrightarrow y = g_2^{-1} g_1 x \Leftrightarrow y \in [x] \Leftrightarrow [x] = [y]$.

- Sur M/G on a la topologie quotient : la plus fine top. t.q. $\pi: M \rightarrow M/G$ est continue.
 $x \mapsto [x]$

Donc $\tilde{U} \subset M/G$ est ouvert ssi $\pi^{-1}(\tilde{U}) \subset M$ est ouvert.

En général, si $\sim$ est une rel. d'équivalence, $\pi: M \rightarrow M/\sim$ est continue mais pas ouverte.

Ici π est aussi ouverte : si $U \subset M$ est ouvert, alors $\tilde{U} = \pi(U)$ est ouvert car $\pi^{-1}(\tilde{U}) = U$ l'est.

- M paracompact $\Rightarrow M/G$ paracompact (tout recouvrement admet un raffinement loc. fini)
car il suffit de prendre des ouverts dans M/G de la forme $\pi(U)$ avec U ouvert dans M .

- Par contre M/G séparé ne suit pas seulement du fait que M est séparé :
montrons que M/G est séparé si G est un gp discret et l'action est continue, libre et propre.

Sont $[x] \neq [y]$ deux orbites distinctes dans M/G . Alors $y \neq gx$ dans M , $\forall g \in G$.

Cherchons des voisinages de $[x]$ et $[y]$ de la forme $\tilde{V}_y = \pi(V_y)$, V_y = vois. de y dans M ,

et $\tilde{U}_{gx} = \pi(U_{gx})$ avec $U_{gx} = gU_x$ et U_x = vois. de x , U_{gx} vois. de gx car action continue.

M séparé $\Rightarrow \forall g \in G \exists$ voisinages ouverts $U_g \ni x$ (donc $gU_g \ni gx$) et $V_g \ni y$ dans M

t.q. $gU_g \cap V_g = \emptyset$. Mais attention : $U_g \in V_g$ dépendent de g !

Action propre $\Rightarrow \forall K_1, K_2$ compacts $\subset M$, l'ensemble $\{g \in G | gK_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$ est compact.

G groupe discret $\Rightarrow \{g \in G | gK_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$ est fini.

Choisissons deux compacts $K_x \ni x$, $K_y \ni y$ et posons $\{g \in G | gK_x \cap K_y \neq \emptyset\} = \{g_1, \dots, g_N\}$.

M séparée $\Rightarrow \forall g_i \in G (i=1, \dots, N) \exists$ vois. ouverts $U_i \subset K_x$ de x et $V_i \subset K_y$ de y t.q. $g_i U_i \cap V_i = \emptyset$.

Alors $U_x = \bigcap_{i=1}^N U_i$ est un voisinage ouvert de x (car l'intersection est finie)

et $V_y = \bigcap_{i=1}^N V_i$ est un vois. ouvert de y t.q. $gU_x \cap V_y = \emptyset \forall g \in G$.

Ceci signifie que $g_1 U_x \cap g_2 V_y = \emptyset \forall g_1, g_2 \in G$, i.e. que les voisinages $\tilde{U}_x = \pi(U_x)$

et $\tilde{V}_y = \pi(V_y)$ sont distincts dans M/G : les orbites $[x]$ et $[y]$ sont séparées.

- La projection $\pi: M \rightarrow M/G$ est continue (par déf de top. quotient) et ouverte (cf. haut).

Elle est surjective (par déf de M/G comme espace des orbites).

Montrons que π est localement injective, i.e. $\forall x \in M \exists$ ouvert $U \ni x$ t.q. $\pi|_U$ est injective.

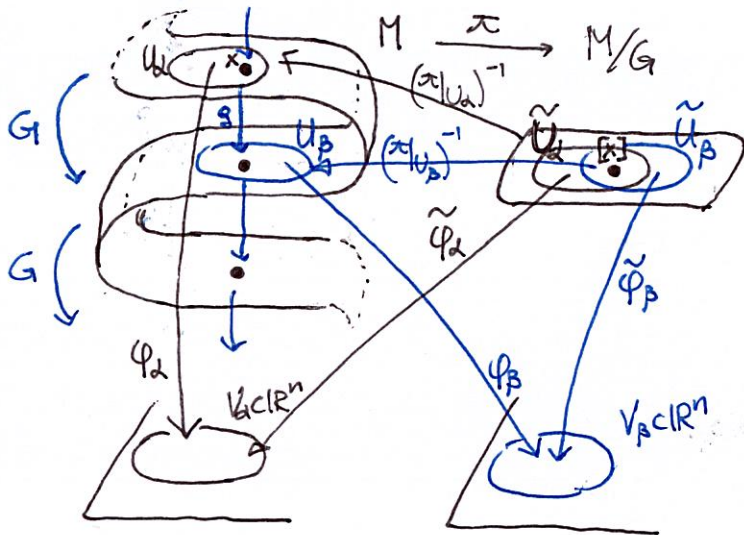
Action libre $\Rightarrow \forall g \in G: gx \neq x \Rightarrow \exists U \ni x$ t.q. $gU \cap U = \emptyset \forall g \neq e$ (U compact etc).

Alors : $\forall x_1, x_2 \in U$, on a : $\pi(x_1) = \pi(x_2) \Leftrightarrow \exists g \in G$ t.q. $x_2 = gx_1 \in gU \cap U \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow g = e$ car action libre et propre

$\Leftrightarrow x_2 = x_1$.

- Les propriétés précédentes disent que M est un revêtement de M/G à fibre discrète G et π est un homéomorphisme local.



Ceci permet de construire un atlas

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\} \text{ sur } M/G$$

à partir d'un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ sur M t.q. $\pi|_{U_\alpha}$ est injective (donc un homéomorphisme):

cartes: $\tilde{U}_\alpha = \pi(U_\alpha)$

$$\tilde{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha \circ \pi|_{U_\alpha}^{-1} \text{ bien déf. et homéo}$$

changements de cartes: sur $\tilde{U}_{\alpha\beta} = \tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta$ on a:

$\forall [x] \in \tilde{U}_{\alpha\beta}$ avec $x \in U_\alpha$ (i.e. $\pi|_{U_\alpha}^{-1}([x]) = x$), si $\pi|_{U_\beta}^{-1}([x]) = y \in U_\beta$ avec $y \neq x$,

alors $\pi(x) = [x] = \pi(y) \Rightarrow \exists g \in G$ t.q. $y = gx$,

i.e. $\pi|_{U_\beta}^{-1}(\pi|_{U_\alpha}(x)) = gx$ pour un $g \in G$, donc $\pi|_{U_\beta}^{-1} \circ \pi|_{U_\alpha} = \text{action de } G$.

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1} &= \tilde{\varphi}_\beta|_{\tilde{U}_{\alpha\beta}} \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}|_{\tilde{U}_{\alpha\beta}} = (\varphi_\beta \circ \pi|_{U_\beta}^{-1})|_{\tilde{U}_{\alpha\beta}} \circ (\varphi_\alpha \circ \pi|_{U_\alpha}^{-1})|_{\tilde{U}_{\alpha\beta}}^{-1} \\ &= \varphi_\beta \circ (\pi|_{U_\beta}^{-1} \circ \pi|_{U_\alpha}) \circ \varphi_\alpha^{-1} \end{aligned}$$

est un difféomorphisme, car les cartes mêmes de M sont des difféos (lues en "coordonnées locales" sur elles mêmes!) et

$\pi|_{U_\beta}^{-1} \circ \pi|_{U_\alpha}$ coïncide avec l'action de G qui est par difféomorphismes.

- Conclusion: M/G est une variété et $\pi: M \rightarrow M/G$ est un difféo local. $\square$

Exo 7

(1) M.q. $\mathbb{S}^1$ comme sous-var. de $\mathbb{R}^2$ est difféomorphe au quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par l'action $T_n(t) = t + n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{R}$.

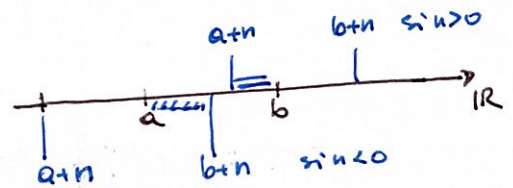
Preuve: • L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ est libre, car $T_n(t) = t + n = t \Leftrightarrow n = 0 \Leftrightarrow T_n = \text{id}$.

• L'action est propre: $\forall$ compact $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$, on a:

$$t \in K \cap T_n K \Leftrightarrow t \in K \text{ et } t = T_n(s) = s + n \text{ pour } s \in K$$

$$\Leftrightarrow a \leq t \leq b \text{ et } a \leq s = t - n \leq b$$

$$\Leftrightarrow a + n \leq t \leq b + n$$



$$\text{ceci est possible} \Leftrightarrow \begin{cases} a + n \leq b \text{ ie } n \leq b - a, \text{ si } n > 0 \\ a \leq b + n \text{ ie } -n \leq b - a, \text{ si } n < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ l'ensemble $\{n \in \mathbb{Z} \mid T_n K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

• On peut caractériser $\mathbb{S}^1$ par les param. locales $\gamma_{t_0}:]t_0, t_0 + 1[\rightarrow \mathbb{S}^1$
pour deux choix de t_0 , et les cartes locales $\varphi_{t_0} = \gamma_{t_0}^{-1}$ associées.

L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1: t \mapsto e^{i2\pi t} = \gamma_{t_0}(t)$ est lisse et périodique, donc se factorise en une application f qui est un difféo par rapport aux cartes γ_{t_0} .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \\ \pi \downarrow & & \uparrow \gamma_{t_0} \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xleftarrow{f} &]t_0, t_0 + 1[\end{array}$$

(2) Bande de Möbius $= (\mathbb{S}^1 \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[) / \mathbb{Z}$ où $\mathbb{Z}$ agit sur le cylindre $\mathbb{S}^1 \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ par l'action $T_m([t], u) = ([t + \frac{m}{2}], (-1)^m u)$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $m \in \mathbb{Z}$.

M.q. la bande de Möbius est une variété lisse.

Preuve: • L'action de $\mathbb{Z}$ sur le cylindre est libre: $T_m([t], u) = ([t + \frac{m}{2}], (-1)^m u) = ([t], u) \Leftrightarrow m = 0$.

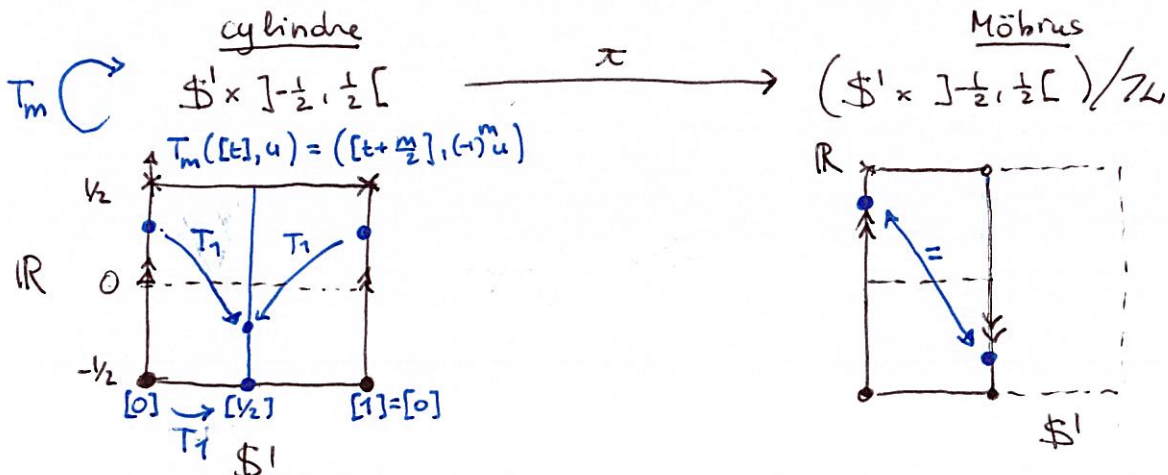
• Elle est propre: $(\mathbb{S}^1 \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[) / \mathbb{Z} \cong (\mathbb{R} \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[) / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec action

$$T_{n,m}(t, u) = (t + n + \frac{m}{2}, (-1)^m u)$$

et on montre que $\forall$ compact $K = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R} \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$,

l'ensemble $\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid T_{n,m} K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

• Donc la bande de Möbius est une variété diff. de dim. 2.

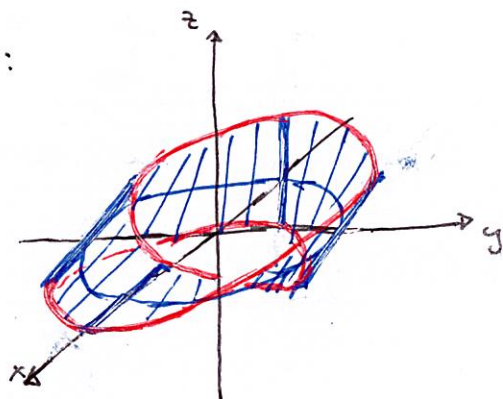


(3) Bande de Möbius comme sous-var. de $\mathbb{R}^3$:

$$M = \left\{ f(\theta, u) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{u}{2} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \cos \theta \\ \cos(\theta/2) \sin \theta \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi[, u \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\right\}$$

Dessiner M puis u.q. M est difféomorphe à $(\mathbb{S}^1 \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[) / \mathbb{Z}_2$.

Dessin :



$$\alpha(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \text{ cercle}$$

$$\beta(\theta) = (\cos(\theta/2) \cos \theta, \sin(\theta/2) \cos \theta, \sin(\theta/2))$$

$$\beta(0) = (1, 0, 0)$$

$$\beta(\pi/2) = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\beta(\pi) = (0, 0, 1)$$

$$\beta(3\pi/2) = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\beta(2\pi) = (-1, 0, 0)$$

Difféos locaux + bijection globale :
cylindre

$$\begin{array}{c} \mathbb{S}^1 \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\\ \left(\frac{\theta}{2\pi}, u \right) \xleftarrow{\exp \times \text{id}} (\theta, u) \xrightarrow{q} \left\{ q(\theta, u) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{array}$$

Möbius

$$\begin{array}{c} (\mathbb{S}^1 \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[) / \mathbb{Z}_2 \\ \tilde{\exp} \times \text{id} \nearrow (\frac{\theta}{2}, u) \searrow (\theta, u) \\ \downarrow f \quad \downarrow \varphi \\ (\alpha, u) = (2\theta, u) \\ \left\{ f(\alpha, u) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \cos \alpha \\ \cos(\alpha/2) \sin \alpha \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix} \right\} \end{array}$$

$f \circ (\tilde{\exp} \times \text{id})^{-1}$