

Fiche TD 6 - Fibrés vectoriels

Ex 1 a

1) $E = M \times \mathbb{R}^k$ est un produit des variétés, donc une variété.

2) $\pi : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M$ est une submersion surjective :

Surjectivité : $p \in M$ a l'antécédent $(p, 0) \in E$.

Submersivité : Il faut démontrer que $\forall (p, v) \in E$ $T_{(p,v)} E \rightarrow T_p M$ est surjectif.

Soit $\xi \in T_p M$

Soit $\gamma : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ une courbe qui réalise ξ (i.e. $[\gamma] = \xi$).

Considérons la courbe $\tilde{\gamma} : I \rightarrow E$

donnée par $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), v)$

Soit $\tilde{\xi}$ le vecteur tangent réalisé par $\tilde{\gamma}$. ($\tilde{\xi} \in T_{(p,v)} E$.)

On a $T_{(p,v)} \pi(\tilde{\xi}) = T_{p,v} \pi([\tilde{\gamma}])$
 $= [\pi \circ \tilde{\gamma}] = [\gamma] = \xi$.

3) $E_p = \pi^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ est un espace vectoriel.

4) Soit $p \in M$ donnée. On prend comme voisinage U tout l'espace M et comme difféomorphisme l'identité.

$$S_U : E_U = E_M = \pi^{-1}(M) = E \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$$

- Cette application est un difféomorphisme.
- La restriction $E_p = \{p\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$ est un isomorphisme des espaces vectoriels.

(2) Soit $E \xrightarrow{p} M \times \mathbb{R}^k$ un isomorphisme des fibrés vectoriels.

On définit $\partial_i \in \Gamma(M, E)$ par

$$\partial_i(m) = p^{-1}(m, e_i)$$

Si $e_1, \dots, e_k$ sont la base standard de $\mathbb{R}^k$.

$\forall p \in M : \partial_1(p), \dots, \partial_k(p)$ sont une base de E_p
 parce que $p_p^{-1} : \{p\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow E_p$
 est un isomorphisme des fibrés vectoriels.
 (et donc l'image de la base $e_1, \dots, e_k$ est une base)

Maintenant soit E un fibré vectoriel.

et $\delta_1, \dots, \delta_k \in \Gamma(M, E)$

t.q. $\forall p \in M$ $\delta_1(p), \dots, \delta_k(p)$ sont une base de E_p .

Définissons: $\mathcal{P}: M \times \mathbb{R}^k \rightarrow E$ par
 $(p, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \rightarrow \sum_{i=1}^k \lambda_i \delta_i(p)$

$\mathcal{P}$ preserve les fibres: $\pi_E \mathcal{P} = \pi_{M \times \mathbb{R}^k}$

$\mathcal{P}|_{\{p\} \times \mathbb{R}^k}$ est bijectif $\forall p \in M$,
 parce que $\delta_1(p), \dots, \delta_k(p)$ forment une base.
 $\Rightarrow \mathcal{P}$ est bijectif.

Il reste à démontrer que $\mathcal{P}$ et son inverse sont linéaires.

Soit $(p, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \in M \times \mathbb{R}^k$ et $v = \mathcal{P}(p, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \in E$.

Prelevons une trivialisation locale de E autour de p .

i.e. $U \subset M, p \in U, \varphi: E_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$

Pour démontrer que $\mathcal{P}$ est un difféomorphisme, il suffit de démontrer que $\varphi \circ \mathcal{P}|_{U \times \mathbb{R}^k}$ est un difféomorphisme

$$U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$$

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{P}|_{U \times \mathbb{R}^k} : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \circ \mathcal{P}|_{U \times \mathbb{R}^k} (p, \lambda_1 - \lambda_k) &= \mathcal{I} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \delta_i(p) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \circ \mathcal{I}(\delta_i(p)) \end{aligned}$$

On note que les applications $\mathcal{I} \circ \delta_i|_U : U \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ sont linéaires, et aussi les applications

$$f_i := \pi_{\mathbb{R}^k} \circ \mathcal{I} \circ \delta_i|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

$$\text{On a } \mathcal{I} \circ \delta_i|_U(p) = (p, f_i(p)).$$

Donc :

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{P}|_{U \times \mathbb{R}^k} (p, \lambda_1 - \lambda_k) = (p, \sum_{i=1}^k \lambda_i \circ f_i(p))$$

En particulier $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}|_{U \times \mathbb{R}^k}$ est lisse, donc $\mathcal{P}|_{U \times \mathbb{R}^k}$ est lisse près de ~~l'ensemble~~ tout $(p, \lambda_1 - \lambda_k) \in M \times \mathbb{R}^k$, donc lisse.

Pour démontrer que $\tilde{\mathcal{P}}^{-1}$ est lisse on va aussi utiliser $\mathcal{I}$, on démontre que $(\tilde{\mathcal{P}}^{-1})|_{E_U} \circ \mathcal{I}^{-1} = (\mathcal{I} \circ \mathcal{P}|_{U \times \mathbb{R}^k})^{-1}$ est lisse.

On considère l'application Θ
 $\Theta : U \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}, p \rightarrow (f_1(p), \dots, f_k(p))$
 Vu que $f_1(p), \dots, f_k(p)$ sont une base de $\mathbb{R}^k$ ($\forall p$),
 l'image de Θ est dans $\mathcal{GL}(k, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{k \times k}$.

On rappelle que $A \mapsto A^{-1}$ est une application
 lisse de $\mathcal{GL}(k, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{GL}(k, \mathbb{R})$
 (e.g. parce que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com}(A)^t$
 est une fonction rationnelle (matrice))

$$\text{On a } (\mathcal{I} \circ p|_{U \times \mathbb{R}^k})^{-1}(p, y) \\ = (p, (\Theta(p))^{-1} y), \text{ donc lisse}$$

$$\Rightarrow (p|_{U \times \mathbb{R}^k})^{-1} \text{ lisse}$$

$$\Rightarrow p^{-1} \text{ lisse}$$

Au total p est un difféo entre $M \times \mathbb{R}^k$ et E
 t.q. $\pi_E p = \pi_{M \times \mathbb{R}^k}$ et linéaire sur chaque fibre
 (par construction)

Donc E est trivial.

Ex 2:

Soit $\mathcal{A} = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \}$ un atlas sur M . On va construire un atlas pour TM : Soit $(p, v) \in TM$ (i.e. $p \in M$, $v \in T_p M$)

Soit $U_\alpha \ni p$, $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Considérons $T\varphi_\alpha: T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$
 $\forall q \in U_\alpha$.
 $T\varphi_\alpha: TM|_{U_\alpha} \rightarrow T\mathbb{R}^n$.

On peut les mettre ensemble pour obtenir

$$T\varphi_\alpha: TM|_{U_\alpha} \rightarrow T\mathbb{R}^n.$$

Maintenant on a $T\mathbb{R}^n \xrightarrow[\cong]{\sim} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$
 $[x] \mapsto x(0) \quad \dot{x}(0)$

$$[x, w] \longleftarrow (x, w)$$

$$x_w(t) = x + tw.$$

On obtient $\Psi_\alpha = \theta \circ T\varphi_\alpha: TM|_{U_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

Notre Atlas pour TM est

$$\mathcal{A}_{TM} := \{ TM|_{U_\alpha}, \Psi_\alpha \}.$$

(Notons que Ψ_α est injectif $\forall \alpha$)

Si y a aussi la topologie de TM à définir :
 On dit que $U \subset TM$ est ouvert si
 $\varphi_\alpha(V \cap TM|_{U_\alpha}) \subset \mathbb{R}^{2n}$ est ouvert $\forall \alpha$.

À vérifier

- partie technique { 1) cela donne une topologie
 2) cette topologie est Hausdorff.
 3) " es paracompacte.
- partie importante { 4) ATM est un Atelas.

1) Est une conséquence du fait que

$$\begin{aligned} V &\mapsto \varphi_\alpha(V \cap TM|_{U_\alpha}) \\ P(TM) &\rightarrow P(\mathbb{R}^{2n}) \end{aligned}$$

préservent les unions et les intersections.
 (et envoie TM vers l'ensemble
 ouvert $P(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$)

2) Pour $\xi, \zeta \in TM$, si $\pi(\xi) \neq \pi(\zeta)$ ($\in M$)
 prenons deux ouverts $U_{\pi\xi}, U_{\pi\zeta} \subset M$
 qui séparent $\pi(\xi)$ et $\pi(\zeta)$,
 i.e. $\pi(\xi) \in U_{\pi\xi}$, $\pi(\zeta) \in U_{\pi\zeta}$
 mais $\pi(\xi) \notin U_{\pi\zeta}$, $\pi(\zeta) \notin U_{\pi\xi}$.

$\pi M|_{U_{\pi\xi}}$ $\pi M|_{U_{\pi\tilde{\xi}}}$ sont des ouverts
qui séparent $\xi, \tilde{\xi}$.

(On a utilisé que M est Hausdorff)

Si $\pi(\xi) = \pi(\tilde{\xi})$ on prend une carte

$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ t.q. $\pi(\xi) \in U_\alpha$.

On a $\varphi_\alpha(\xi) \neq \varphi_\alpha(\tilde{\xi})$ (injectivité de φ_α).

Soient U_1, U_2 les ouverts en $\mathbb{R}^{2n}$ qui

séparent $\varphi_\alpha(\xi), \varphi_\alpha(\tilde{\xi})$. Alors $\varphi_\alpha^{-1}(U_1)$ et

$\varphi_\alpha^{-1}(U_2)$ séparent $\xi, \tilde{\xi}$.

3) On montre que TM est paracompact.

Soit $\{V_\beta\}$ un recouvrement de TM .

Il y a un raffinement $\{\tilde{V}_\beta\}$ t.q. $\tilde{V}_\beta \subset TM|_{U_\alpha}$
(pour un $\alpha = \alpha(\beta)$).

On note que l'application $TM \xrightarrow{\pi} M$ est ouverte.

Donc $\{\pi(\tilde{V}_\beta)\}$ est un recouvrement de M .

$\rightarrow$ Il y a un raffinement localement fini de $\{\pi(\tilde{V}_\beta)\}$
Appelons-le W_γ . Et soit $\beta(\gamma)$ t.q. $W_\gamma \subset \pi(\tilde{V}_{\beta(\gamma)})$.

Construisons le raffinement $\pi^{-1}(W_\gamma) \cap \tilde{V}_\beta = \tilde{W}_{\gamma, \beta}$
de $\{\tilde{V}_\beta\}$.

Pour chaque γ fixe, les $\pi^{-1}(W_\gamma) \cap \tilde{V}_\beta$ forment
un recouvrement de $\pi^{-1}(W_\gamma)$.

Chaque $\pi^{-1}(W_\gamma)$ fait partie d'un $TM|_{U_\alpha}$.

Les ensembles $\Psi_\alpha(\pi^{-1}(W_\gamma) \cap \tilde{V}_\beta)$ sont ouverts
dans $\mathbb{R}^{2n}$ et forment un recouvrement de
 $P(W_\gamma) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$. ~~$P(W_\gamma) \times \mathbb{R}^n$~~ $P(W_\gamma) \times \mathbb{R}^n$ est paracompact,
donc il y a un raffinement de $\Psi_\alpha(\pi^{-1}(W_\gamma) \cap \tilde{V}_\beta)$.

Appelons le raffinement $\{\bar{W}_{\gamma\delta}\}$.

Les ensembles $\Psi_\alpha^{-1}(\bar{W}_{\gamma\delta})$ sont un raffinement
localement fini de $\{\tilde{V}_\beta\}$. (A vérifier)

4) $\mathcal{A}_{TM}$ est un Atelas.

On a déjà dit que $\varphi_\alpha: TM|_{U_\alpha} =: TU_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ sont injectifs. Il faut démontrer que les changements des cartes sont les difféos.

Rappel: $\varphi_\alpha: TM|_{U_\alpha} \xrightarrow{Tp_\alpha} T\mathbb{R}^n \xrightarrow{\Theta} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$

Autre carte: $\varphi_\beta: TM|_{U_\beta} \xrightarrow{Tp_\beta} T\mathbb{R}^n \xrightarrow{\Theta} \mathbb{R}^{2n}$

On sait que $p_\beta \circ p_\alpha^{-1}: p_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow p_\beta(U_\beta)$ est un difféomorphisme.

Par définition du tangent / de la différentielle on a

$$T(f \circ g) = T_f \circ T_g$$

Donc: $T(p_\beta \circ p_\alpha^{-1}) = Tp_\beta \circ Tp_\alpha^{-1}|_{TM|_{p_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}}$

Donc $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1} = \Theta \circ Tp_\beta \circ Tp_\alpha^{-1} \circ \Theta^{-1}|_{\Theta(Tp_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta))}$
 $= \Theta T(p_\beta \circ p_\alpha^{-1}) \circ \Theta^{-1}|_{\dots}$

Maintenant on observe que pour une application
lisse $f: U \rightarrow V$

la composition $\Theta \circ Tf \circ \Theta^{-1}: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow TU \rightarrow TV \rightarrow V \times \mathbb{R}^m$
est juste la jacobienne au sens:

$$(u, \xi) \mapsto f(u), (Jf)_u(\xi) \quad \text{ou} \quad (u, \xi) \mapsto f(u + t\xi)$$

$$(u, \xi) \xrightarrow{\Theta^{-1}} (\gamma_{u, \xi}(t) = u + t\xi) \xrightarrow{Tf} (\tilde{\gamma}(t) = f(u + t\xi))$$

$$\downarrow \Theta$$

$$\tilde{\gamma}(0) = J_u f(\xi).$$

En particulier si $\varphi_p \varphi_\alpha^{-1}$ est C^k
on a que $\psi_p \psi_\alpha^{-1}$ est C^{k-1} .

Donc les changements des cartes sont différentiables
(Si on suppose $k \geq 2$), et TM est une
variété différentiable.

Ex 3 Prenons une carte (U, φ) de M t.q. $\varphi(u) = u$
 (U', φ') de M'
 et $(TM|_U, \varphi)$ $(TM'|_{U'}, \varphi')$ les cartes
 de TM, TM' correspondantes.

On a vu que

$$\begin{array}{ccc} TM|_U & \xrightarrow{Tf} & TM'|_{U'} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{(f, Jf)} & \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n'} \end{array}$$

Donc $Tf = \varphi' (f, Jf) \varphi^{-1}$
 est de classe C^k ssi Jf est de class C^k ,
 i.e f est de classe C^{k+1} .

Ex 4

Considérons $S^1 \subset \mathbb{R}^2$

avec cartes $\pi_N: S^1 \setminus \left(\frac{0}{1}\right) \rightarrow \mathbb{R}$
 $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{p_1}{1-p_2}$

$\pi_S: S^1 \setminus \left(\frac{0}{-1}\right) \rightarrow \mathbb{R}$
 $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{p_1}{1+p_2}$

Cartes pour $TS^1: \psi_N = \theta \circ T\pi_N: TS^1|_{S^1 \setminus \left(\frac{0}{1}\right)} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\psi_S = \theta \circ T\pi_S: TS^1|_{S^1 \setminus \left(\frac{0}{-1}\right)} \rightarrow \mathbb{R}^2$

Changement des cartes $S^1: \pi_S \pi_N^{-1}: \mathbb{R} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R} \setminus 0$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$

Changement des cartes $TS^1: \psi_S \circ \psi_N^{-1}: \mathbb{R} \setminus 0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus 0 \times \mathbb{R}$
 $(x, v) \mapsto \left(\frac{1}{x}, -\frac{1}{x^2} \cdot v\right)$

Pour donner une trivialisaton de TS^1 il suffit de trouver une section $S^1 \xrightarrow{\theta} TS^1$ qui n'est jamais nulle.

Une telle section est complètement décrit par

$$\bar{\sigma}_N = \psi_N \circ \sigma \circ \pi_N^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \longmapsto (x, \bar{\sigma}_N(x))$$

et $\bar{\sigma}_S = \psi_S \circ \sigma \circ \pi_S^{-1}$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \longmapsto (x, \bar{\sigma}_S(x))$$

Pour que $\bar{\sigma}_N, \bar{\sigma}_S$ donnent une section $\bar{\sigma} \in \mathcal{M}(S^1, \mathbb{R}^2)$
ils doivent satisfaire $\bar{\sigma}_S = \psi_S (\psi_N^{-1} \bar{\sigma}_N \pi_N) \pi_S^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{i.e. } \bar{\sigma}_S(x) &= (\psi_S \psi_N^{-1}) \bar{\sigma}_N\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (\psi_S \psi_N^{-1}) \left(\frac{1}{x}, \bar{\sigma}_N\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{x}, -\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \bar{\sigma}_N\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

difficile à trouver $= (x, -x^2 \bar{\sigma}_N\left(\frac{1}{x}\right))$

~~On définit $\bar{\sigma}_N(x)$ et $\bar{\sigma}_S(x)$~~

Si on prend $\bar{\sigma}_N(x) = x^2 + 1$ (ne s'annule pas)
on obtient $\bar{\sigma}_S(x) = -x^2 \cdot \left(\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1\right)$
 $= -(1 + x^2)$

qui ne
s'annule pas
non plus

Au total, σ_M, σ_S ensemble définissant
une section $\tilde{\sigma}: S' \rightarrow TS'$ qui ne s'annule
jamais, donc d'après Exo 1 TS' est
triviale.

(2) On considère

$$\begin{array}{ccc} M \times M' & \xrightarrow{p'=p_2} & M' \\ p=p_1 \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

Les applications p, p' sont lisses,
 $\Rightarrow T_p, T_{p'}$ sont lisses aussi.

$\Rightarrow (T_p, T_{p'}) : T(M \times M') \xrightarrow{P} TM \times TM'$
est lisse.

De plus elle est bijective: Soit $(\xi, \zeta) \in TM \times TM'$.

Alors $\exists \gamma: I \rightarrow M$ t.q $\xi = [\gamma]$

et $\gamma': I \rightarrow M'$ t.q $\zeta = [\gamma']$.

La courbe $(\gamma, \gamma'): I \rightarrow M \times M'$

sat. $p_*(\gamma, \gamma') = \gamma$ $p'_*(\gamma, \gamma') = \gamma'$

donc $T_p[(\gamma, \gamma')] = \xi$ $T_{p'}[(\gamma, \gamma')] = \zeta$

Donc P est surjectif.

Il reste à montrer que $\underline{P}$ est injectif.

Soit $[x] \in T(M \times M')$ t.q. $\underline{P}[x] = 0$.

Ca veut dire qu'il ya une carte (U, φ) de M
et une carte (U', φ') de M' t.q.

$$\overbrace{\varphi \circ \varphi' \circ \gamma}^{\circ}(0) = 0$$

$$\text{et } \overbrace{\varphi \circ \varphi' \circ \gamma}^{\circ}(0) = 0.$$

Prends la carte $U \times U', (\varphi, \varphi')$ de $M \times M'$

$$\text{On a que } \overbrace{(\varphi, \varphi') \circ \gamma}^{\circ}(0) = (\overbrace{\varphi \circ \varphi' \circ \gamma}^{\circ}(0), \overbrace{\varphi' \circ \varphi' \circ \gamma}^{\circ}(0)) \\ = (0, 0) = 0.$$

$$\text{Donc } [x] = 0.$$

Il reste à démontrer que $\underline{P}^{-1}$ est lisse.

~~Soit $(v_1, v_2) \in TM \times TM'$ avec $\pi(v_1) = x_1, \pi(v_2) = x_2$~~

Soit $(v_1, v_2) \in TM \times TM'$ avec $\pi(v_1) = x_1, \pi(v_2) = x_2$

Prends les cartes $(U, \varphi), (U', \varphi')$ autour de x_1, x_2

et les cartes $(TM|_U, \Psi), (TM'|_{U'}, \Psi')$
correspondantes.

On a aussi la carte $\underline{\Phi} = (\varphi, \varphi')$ de $M \times M'$
et la carte $\underline{\Psi}$ de $T(M \times M')$ correspondante.

$$\begin{array}{ccc}
 T(M \times M') & \xrightarrow{\quad \underline{P} \quad} & TM \times TM' \\
 \cup & & \cup \\
 T(M \times M')|_{u \times u'} & \xrightarrow{\quad \underline{P} \quad} & TM|_u \times TM'|_{u'} \\
 \downarrow T\Phi & & \downarrow TP \times TP' \\
 T(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'}) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & T\mathbb{R}^n \times T\mathbb{R}^{n'} \\
 \downarrow \Theta & \begin{array}{c} (\psi, \psi') \circ \underline{P} \circ \Phi^{-1} \\ \searrow \quad \quad \quad \downarrow (\theta, \theta') \end{array} & \\
 (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'}) \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'}) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n'} \\
 ((q, \xi), (q', \xi')) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & (q, q'), (\xi, \xi')
 \end{array}$$

L'inverse de $(\psi, \psi') \circ \underline{P} \circ \Phi^{-1}$ est
 lisse, donc $\underline{P}^{-1}$ est lisse.

(3) On sait qu'il y a un difféo

$$f: \pi^2 \xrightarrow{\sim} S^1 \times S^1$$

Preons

$$T\pi^2 \xrightarrow{Tf} T(S^1 \times S^1) \xrightarrow[\cong]{p} TS^1 \times TS^1$$

On a aussi un isomorphisme

$$\mathcal{I}: TS^1 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$$

des fibrés vectoriels

$$\begin{array}{c} \downarrow (\mathcal{I}, \mathcal{I}) \\ S^1 \times \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{R} \\ \downarrow \text{6} \downarrow \text{X} \downarrow \\ S^1 \times S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \end{array}$$

La composition est un difféomorphisme qui préserve les fibres.

De plus il est linéaire fibre par fibre, donc un isomorphisme des fibrés vectoriels.

(4) La méthode de (3) marche plus généralement:

Si $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ sont des fibrés,
alors $E \times F \rightarrow M \times N$ est un fibré.

De plus si E et F sont triviaux $E \times F$ est

trivial $E \times F \cong (M \times \mathbb{R}^k) \times (N \times \mathbb{R}^{k'}) \cong (M \times N) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'}$

En particulier si TM et TN sont triviaux,

$T(M \times N)$ est trivial aussi.

Par exemple $T(TS') \cong T(S' \times \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \cong TS' \times T\mathbb{R} &\cong (S' \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \\ &\cong \begin{array}{ccc} \downarrow & \searrow & \downarrow \\ S' \times \mathbb{R} & \times & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \end{array} \\ &\cong TS' \times \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Donc $TT S' \rightarrow TS'$ est trivial.

(Ici on utilise que $T\mathbb{R}$ est trivial, qui est simple à démontrer.)

(5) Bande de Möbius est un quotient de $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{q} M = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) / \mathbb{Z}$$

ou l'action est

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (z, (x, v)) &\longmapsto (x+z, (-i)^z v) \end{aligned}$$

Il y a une projection naturelle $M \xrightarrow{\pi} S^1$
 $\downarrow \cong$
 $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$
 $[(x, v)] \mapsto [x]$.

Les fibres sont les espaces vectoriels.

$$\pi^{-1}([x]) \cong \{x\} \times \mathbb{R}$$

Pour un $[x]$ donné l'inverse de $q|_{\dots}$

$$[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}] \times \mathbb{R} \xrightarrow{q} M$$

donne une carte, φ_x

Cette carte est en fait une trivialisation locale.

$\pi^{-1}([x]) = \{ \dots \}$
 Donc M n'est pas trivial.

On va démontrer que toute section $\Gamma(S', M)$ s'annule quelque part. (Donc, que $M \rightarrow S'$ n'est pas trivial)

Soit $\begin{array}{ccc} & & \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \end{array}$ une section

Soit $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le quotient.

On peut construire une fonction linéaire $\tilde{g}$ t.q

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathbb{R}^2 \\ q \downarrow & & \downarrow Q \\ S = \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} = M \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{commute.} \\ (\text{i.e. } Q\tilde{g} = gq.) \end{array}$$

par $\tilde{g}(x) = \varphi_x \circ g([x]).$

Considérons la fonction $\text{pr}_2 \tilde{g}(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

On a que $\text{pr}_2 \tilde{g}(0) = \text{pr}_2 \tilde{g}(1).$

Donc par th. des valeurs intermédiaires

$\exists x \in [0, 1]$ t.q $\text{pr}_2 \tilde{g}(x) = 0.$

Mais par construction à ce point

$\tilde{g}([x]) = 0$, donc g s'annule $(\forall g)$

Donc $M \rightarrow S'$ pas trivial.

Ex 5. (1) $(x, v) \xrightarrow{F} (f(x), J_x f(v))$

$$J_{(x,v)} F = \left(\begin{array}{c|c} J_x f & \vdots \\ \hline 0 & J_x F \end{array} \right)$$

Si $J_x f$ a rang $n-k$, cette application a rang $2(n-k)$, i.e. elle est surjective.

(2) $\mathcal{S} = \{(x, v) \mid x \in M, v \in \ker(J_x f)\}$

↓

M

Pour x fixé $\ker J_x f$ est un espace vectoriel.

Il faut construire une trivialisation locale.

Soit $x \in U \subset M$, $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une carte.
et $v_1, \dots, v_k$ une base de $\ker J_x f$.

On rappelle que pour une matrice $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$
la matrice $A^\# = A^*(AA^*)^{-1}$ sat. $AA^\# = \text{id}_{\mathbb{R}^k}$

En particulier $v = A^\# A v \in \ker A \quad \forall v$

Surjective

Donc $e_i(z) = v_i - \sum_{j \neq i} \gamma_{ij} f^{\#} \gamma_{ij} f v_i$
sont les sections de $\ker \gamma_{iz} f$.

De plus $e_i f(x) = v_i$ forment une base
de $\ker(\gamma_{x+} f)$. Donc.

dans un ouvert U_x e_i forment une base
de $\ker \gamma_{z+} f$.

Soit B_z la matrice qui a $e_1(z), \dots, e_k(z)$
comme colonnes.

L'application $U_x \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{T}|_{U_x}$
donnée par $(z, \lambda) \mapsto (z, B_z \lambda)$
est lisse.

Son inverse est lisse aussi, donc
un difféo.

De plus elle préserve la structure
de fibré vectoriel, i.e. elle donne une
trivialisation locale.

(3)

$$M \xrightarrow{i} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k$$

sat. $(f \circ i)(m) = y$

$$TM \longrightarrow T\mathbb{R}^n \longrightarrow T\mathbb{R}^k$$
$$Tf \circ Ti(v) = 0_y.$$

En particulier $\text{Image}(Ti) \subset Tf^{-1}(0_y)$
 $= (f, \gamma f)^{-1}(y, 0)$

$\forall z \in M.$ On a vu dans un TD avant que T_z donne un isomorphisme entre $T_z M$ et $\{z\} \times \ker(\gamma_z f) = \tilde{T}_z$

Un calcul (longue) en coordonnées locales montre que T_i est en fait un difféomorphisme entre TM et $\tilde{T}$, et donc un isomorphisme des fibrés vectoriels.

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \mathcal{I} &= \{ (x, v) \mid f(x)=1 \quad \mathcal{I}_x f v = 0 \} \\
 &= \{ (x, v) \mid \|x\|^2=1 \quad 2x \cdot v = 0 \} \\
 &\cong TS^3.
 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \text{Calcul direct. } \langle e_i, e_j \rangle = \|x\|^2 \delta_{ij}.$$

$\Rightarrow$ $g_i(x)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ sont une base de $\ker \mathcal{I}_x f \quad \forall x$, et des sections lisses. Donc $\mathcal{I}$ trivial, alors $TS^3 \cong \mathcal{I}$ est un fibré linéaire.