FICHE TD 6 - FIBRÉS TANGENTS ET CHAMPS DE VECTEURS

Définition 1: Un **fibré vectoriel (réel) de rang** k sur une variété différentielle M est une variété E munie d'une submersion surjective $\pi : E \to M$, qu'on appelle **projection** du fibré, telle que:

1) la **fibre** $E_p := \pi^{-1}(p)$ en tout point $p \in M$ est un espace vectoriel (réel) de dimension k,
2) la projection π est **localement triviale:** tout $p \in M$ admet un voisinage ouvert $U \subset M$ et un difféomorphisme $\tau_U : E_U := \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ (appelé **trivialisation locale**) tel que
   a) τ_U préserve les fibres, i.e. $pr_1 \circ \tau_U = \pi$ où $pr_1 : U \times \mathbb{R}^k \to U,\ (p, v) \mapsto p$,
   b) la restriction $\tau_p := (\tau_U)|_{E_p} : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Puisque π est surjective, il suit que $E = \bigsqcup_{p\in M} E_p$ est l'*union disjointe* des fibres en chaque point (on ne peut pas additionner les vecteurs de fibres différentes).

Définition 2: Deux fibrés vectoriels $\pi : E \to M$ et $\pi' : E' \to M$ sont **isomorphes** s'il existe un difféomorphisme $\Phi : E \to E'$ qui préserve les fibres, i.e. tel que $\pi' \circ \Phi = \pi$, et qui est linéaire sur les fibres, i.e. pour tout $p \in M$ la restriction $\Phi|_{E_p} : E_p \to E'_p$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 3: Une **section** (C^r ou lisse) d'un fibré vectoriel $\pi : E \to M$ est une application (C^r ou lisse) $\sigma : M \to E$ telle que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$. On note $\Gamma(M, E)$ l'espace des sections lisses du fibré. Puisque E est un fibré vectoriel, les sections aussi forment un espace vectoriel (et même un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions lisses sur M).

Exercice 1. Soit M une variété différentielle.

(1) Montrer que $M \times \mathbb{R}^k$ est un fibré vectoriel, qu'on appelle **fibré trivial**.
(2) Montrer qu'un fibré vectoriel $\pi : E \to M$ de rang k est trivial (c'est-à-dire, isomorphe au fibré trivial) si et seulement si il existe k sections $\sigma_1, ..., \sigma_k \in \Gamma(M, E)$ telles que $\{\sigma_1(p), ..., \sigma_k(p)\}$ est une base de E_p, pour tout $p \in M$.

Exercice 2. Soit M une variété différentielle de dimension n. Le **fibré tangent** de M est l'union disjointe $TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM$ des espaces tangents à tout point de M. Montrer que TM est un fibré vectoriel de rang n. (Les sections du fibré tangent s'appellent **champs de vecteurs** sur M.)

Exercice 3. Soient M et M' deux variétés différentielles et $f : M \to M'$ une application de classe C^1.

(1) Montrer que f est lisse si et seulement si la différentielle (ou application tangente) $df = Tf : TM \to TM'$ est lisse.
(2) On observe que pour $f' : M' \to M''$ (de classe C^1) on a $T(f \circ f') = Tf \circ Tf'$. Demontrez que si f est un diffeomorphisme, Tf est un isomorphisme des fibrés vectoriels.

Exercice 4.

(1) Montrer que le fibré tangent à $\mathbb{S}^1$ est trivial.
(2) Soient M et M' deux variétés différentielles. Montrer que les varietés $T(M \times M')$ et $TM \times TM'$ sont difféomorphes.
(3) Montrer que le fibré tangent au tore $\mathbb{T}^2$ est trivial.
(4) Montrer que le fibré tangent au fibré tangent de S^1 est trivial.
(5) Montrer que la bande de Möbius est un fibré non trivial sur $\mathbb{S}^1$.

(il y a une diexème page)

Exercice 5. Rappel: Soit, $n \geqslant k$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ une application lisse. Si $q \in \mathbb{R}^k$ est une valeur regulière (c'est à dire pour tous $x \in f^{-1}(\{y\})$ on a que Jf_x a rang k), le thèorème de la fonction implicite implique que $M = f^{-1}(\{y\})$ est une sous-varieté lisse de $\mathbb{R}^n$, en particulier une varieté. Fixons un tel f et y.

(1) Demontrez que $(y, 0)$ est une valeur régulière de $(f, Jf) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$. Cela implique que $\mathcal{T} = (f, Jf)^{-1}((y, 0))$ est une varieté lisse.

(2) Demontrez que cette varieté $\mathcal{T}$ est en fait un fibré vectoriel sur M.

(3) Construisez un isomorphisme des fibrés vectoriels $TM \to \mathcal{T}$.

(4) Donnez les equations explicites pour $\mathcal{T}$ pour la fonction $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \sum_{i=1}^4 x_i^2$ et la valeur $y = 1$.

(5) Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ non-nul. Demontrez que les vecteurs suivants forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^4$.

$$e_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad e_1 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} x_4 \\ -x_3 \\ x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

(6) Demontrez que le fibré $\mathcal{T}$ (et donc TS^3) est trivial.