

Exercice 1

Deltoloïde $\gamma(t) = (2\cos t + \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t)) = 2e^{it} + e^{-2it}$, $t \in [0, 2\pi[$.

1. M.q. le support de γ est invariant par rotation $R_{2\pi/3} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

$$\bullet R_{2\pi/3} \gamma(t) = e^{\frac{2\pi i}{3}} (2e^{it} + e^{-2it}) = 2e^{i(t+\frac{2\pi}{3})} + e^{i(-2t+\frac{2\pi}{3})} \quad (*)$$

$$\text{or } e^{i(-2t+\frac{2\pi}{3})} = e^{i(-2(t+\frac{2\pi}{3}) + \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})} = e^{-2i(t+\frac{2\pi}{3})} \quad \frac{6\pi}{3} = 2\pi$$

$$\text{donc } (*) = 2e^{i(t+\frac{2\pi}{3})} + e^{-2i(t+\frac{2\pi}{3})} = \gamma(t+\frac{2\pi}{3}).$$

2. Trouver les points singuliers et les étudier avec un D.L. Dessiner γ .

$$\bullet \gamma'(t) = (-2\sin t - 2\sin(2t), 2\cos t - 2\cos(2t)) = -2(\sin t + \sin(2t), -\cos t + \cos(2t))$$

$$\bullet \|\gamma'(t)\|^2 = 4[(\sin t + \sin(2t))^2 + (-\cos t + \cos(2t))^2]$$

$$= 4[\underbrace{\sin^2 t + 2\sin t \sin(2t) + \sin^2(2t)}_{(1)} + \underbrace{\cos^2 t - 2\cos t \cos(2t) + \cos^2(2t)}_{(2)}]$$

$$= 4[2 + 2(\sin t \sin(2t) - \cos t \cos(2t))]$$

$$\stackrel{(1)}{=} 8(1 - \cos(3t)) \stackrel{(2)}{=} 8 \times 2 \sin^2(\frac{3t}{2}) = 16 \sin^2(\frac{3t}{2})$$

[(1) et (2):
cf rappels
de trigo]

$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = 4 \left| \sin(\frac{3t}{2}) \right|$$

$$\bullet \gamma(t) \text{ est singulier ssi } \|\gamma'(t)\| = 0 \text{ ssi } \frac{3t}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \text{ dans } [0, 2\pi[.$$

On a donc 3 points singuliers, qui divisent la courbe en 3 branches régulières sur des intervalles d'amplitude $\frac{3\pi}{2}$, que l'on obtient par rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ à partir de la branche rég. sur $[0, \frac{3\pi}{2}[$.

$$\bullet \text{D.L. en } t=0: \cos t \sim 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3), \sin t \sim t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$$

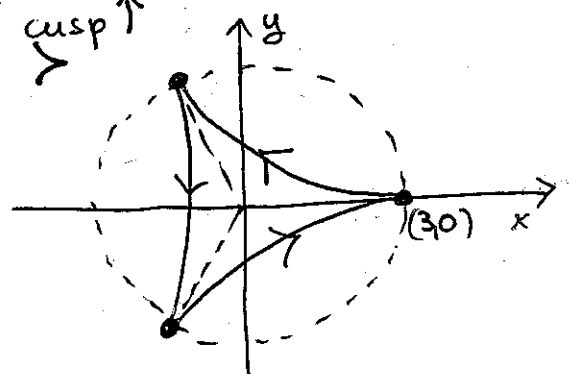
$$\gamma(t) \sim (2 - t^2 + 1 - \frac{1}{2}(2t)^2 + o(t^3), 2t - \frac{1}{3}t^3 - 2t + \frac{1}{6}(2t)^3 + o(t^3))$$

$$= (3 - t^2 - 2t^2 + o(t^3), -\frac{1}{3}t^3 + \frac{4}{3}t^3 + o(t^3))$$

$$\Rightarrow \gamma(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} (3 - 3t^2, t^3) = (3, 0) + (-3t^2, t^3)$$

translation $\uparrow$

cusp $\uparrow$



$$\bullet \text{Dessin: } \|\gamma(t)\| \leq 3$$

$$\gamma(0) = (3, 0)$$

$$\gamma(\frac{2\pi}{3}) = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \|\gamma(\frac{2\pi}{3})\| = \frac{3}{2}\sqrt{1+3} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

3. Calculer la courbure.

$$\kappa_f(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\|x'(t)\|^3}$$

On sait déjà que $\gamma'(t) = -2(\sin t + \sin(2t), -\cos t + \cos(2t))$ et $\|\gamma'(t)\| = 4|\sin(\frac{3t}{2})|$
 $\gamma''(t) = -2(\cos t + 2\cos(2t), \sin t - 2\sin(2t))$

$$\begin{aligned} x'y'' - y'x'' &= (-2)(\sin t + \sin(2t))(-2)(\sin t - 2\sin(2t)) - (-2)(-\cos t + \cos(2t))(-2)(\cos t + 2\cos(2t)) \\ &= 4 \left[\sin^2 t - 2\sin t \sin(2t) + \sin t \sin(2t) - 2\sin^2(2t) \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 t + 2\cos t \cos(2t) - \cos t \cos(2t) - 2\cos^2(2t) \right] \\ &= 4 \left[1 - 2 - \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t) \right] \\ &= 4 (\cos t \cos(2t) - \sin t \sin(2t) - 1) = 4 (\cos(3t) - 1) = -8 \sin^2\left(\frac{3t}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\kappa_f(t) = \frac{8|\sin(\frac{3t}{2})|^2}{4 \times 4 \times 4 |\sin(\frac{3t}{2})|^3} = \frac{1}{8|\sin(\frac{3t}{2})|}$$

4. Calculer une abscisse curviligne sur $[0, \frac{2\pi}{3}]$ et la longueur de γ sur $[0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\gamma'(u)\| du = 4 \int_0^t \left| \sin\left(\frac{3u}{2}\right) \right| du = \pm 4 \times \frac{2}{3} \int_0^{\frac{3t}{2}} \sin \varphi d\varphi \\ &= \pm \frac{8}{3} [-\cos \varphi]_0^{\frac{3t}{2}} = \pm \frac{8}{3} (1 - \cos(\frac{3t}{2})) \end{aligned}$$

On peut aussi choisir $s(t) = \frac{8}{3} \cos(\frac{3t}{2})$, en changeant l'orientation et le point initial d'intégration.

$$L_0^{2\pi}(\gamma) = 3 L_0^{\frac{2\pi}{3}}(\gamma) = 3 \left| s\left(\frac{2\pi}{3}\right) - s(0) \right| = 3 \times \frac{8}{3} \left| \cos(\pi) - \cos(0) \right| = 8 \times |-2| = 16$$

5. Calculer l'aire du domaine D entouré par γ et vérifier l'inégalité isopérimétrique.

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx dy \stackrel{\text{GR}}{=} \int_{\partial D} x dy = (*)$$

Sur $\partial D = \gamma$ on a : $x(t) = 2\cos t + \cos(2t)$, $t \in [0, 2\pi]$
 $y(t) = 2\sin t - \sin(2t) \Rightarrow dy = (2\cos t - 2\cos(2t)) dt$

$$\begin{aligned} (*) &= \int_0^{2\pi} 2(2\cos t + \cos(2t))(\cos t - \cos(2t)) dt = 2 \int_0^{2\pi} (2\cos^2 t - 2\cos t \cos(2t) + \cos t \cos(2t) - \cos^2(2t)) dt \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos t \cos(2t) dt - \int_0^{2\pi} \cos^2(2t) d(2t) = (**)$$

Rappel : $\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}(t + \cos t \sin t)$ et $\int \cos t \cos(2t) dt = \sin t - \frac{2}{3} \sin^3 t$

$$\begin{aligned} (**) &= \frac{4}{2} [t + \cos t \sin t]_0^{2\pi} - 2 [\sin t - \frac{2}{3} \sin^3 t]_0^{2\pi} - \frac{1}{2} [2t + \cos(2t) \sin(2t)]_0^{2\pi} \\ &= 2 \times 2\pi - 0 - \frac{1}{2} \times 4\pi = 4\pi - 2\pi = 2\pi, \Rightarrow L(\gamma)^2 = 16^2 \geq 4\pi \text{Aire}(D) = 8\pi^2 \\ &\quad \text{car } 32 > \pi^2 \approx 9,8. \end{aligned}$$

(-1-)

Question 1: La fonction $f(x,y) = \sqrt{|x^2+y^2|-1}$
 se simplifie à $f(x,y) = 0$ sur les points
 $(x,y) \in S^1$, c'est-à-dire $f|_{S^1}$ est
 la fonction constante 0. Elle est certainement lisse,
 par exemple car $g(x,y) = 0$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$,

$\Rightarrow g|_{S^1}$ est C^∞ sur S^1 et

$g|_{S^1} = f|_{S^1} \Rightarrow f$ est aussi C^∞ .

Exo 2

$$U(2) = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) \mid A^* A = \mathbb{1}_2\}$$

$$F(A) = A^* A$$

1. F est une application lisse sur $\text{Mat}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{R}^{2 \times (2 \times 2)} = \mathbb{R}^8$

Car on écrit

$$A = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 & x_2 + iy_2 \\ x_3 + iy_3 & x_4 + iy_4 \end{pmatrix}$$

on voit que

$$A^* = \begin{pmatrix} x_1 - iy_1 & x_2 - iy_2 \\ x_3 - iy_3 & x_4 - iy_4 \end{pmatrix}$$

est $\mathbb{R}$ -linéaire

et le conjugué de

$A^* A$ sont de

polynôme homogène

de degré 2, donc lisse

(et même analytique)

(-2-)

$A \in \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ et X un vecteur en A (donc aussi une matrice $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$.)

On trace une courbe $\gamma(t) = A + tX$ avec $\gamma(0) = A$
et $\gamma'(0) = X$

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) &= (A + tX)^* (A + tX) \\ &= A^*A + t(X^*A + A^*X) + t^2 X^*X \end{aligned}$$

$$dF(A) \cdot X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F(\gamma(t))) = (X^*A + A^*X + 2tX^*X) \Big|_{t=0} = X^*A + A^*X$$

$$\Rightarrow dF(A) \cdot X = X^*A + A^*X$$

$dF(A)$ la différentielle donc $\mathbb{R}$ -linéaire, mais
 $= X^*A + A^*X$

$dF(A)$ n'est pas $\mathbb{C}$ -linéaire car $X \mapsto X^*$ n'est l'identité.

3. Par définition, $U(2) = F^{-1}(I_2)$.

Si I_2 était valeur régulière de F , $U(2)$ serait une sous-variété lisse ^{réelle} de $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$ de dimension $\dim_{\mathbb{R}} \text{Mat}_2(\mathbb{C}) - \dim_{\mathbb{R}} \text{Mat}_2(\mathbb{C}) = 0$, donc une collection de points isolés, mais $U(2)$ n'est certainement pas discret (par exemple $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(2)$!)

Pour I_2 ne peut pas être une valeur régulière.

On peut aussi voir ce fait directement. Par exemple, $I_2 \in U(2) = F^{-1}(I_2)$.
et $dF(I_2)X = X^*I_2 + I_2^*X = X^* + X$.

Si $\mathbb{1}_2$ étant valeur régulière, $dF(A): \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ devrait être surjective, mais pour $A = \mathbb{1}_2$ nous avons que $dF(\mathbb{1}_2)X = X^* + X$ est une matrice dont la diagonale ne contient que des valeurs réelles, il est donc impossible de trouver un $X \in \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ avec $dF(\mathbb{1}_2)X = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}!$

3. L'image de F est une sous ~~est~~ l'espace de matrices

$$V = \{ H \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid H^* = H \} \quad \text{car}$$

$$(F(A))^* = (A^*A)^* = A^* (A^*)^* = A^* A$$

V est un sous-espace réel de dimension $\{ 4, \text{ car } X \in V \text{ doit être de la forme}$

$$X = \begin{pmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Si on considère F non comme application dans $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$ mais comme application dans V , nous pouvons montrer que $\mathbb{1}_2 \in V$ est valeur régulière de F : soit $A \in F^{-1}(\mathbb{1}_2)$ et soit H une matrice dans V , nous cherchons $X \in \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ avec $dF(A)X = H$. Pose $X = \frac{1}{2}AH$, alors

$$dF(A)X = \frac{1}{2} dF(A)AH = \frac{1}{2}AX = \frac{1}{2}H$$

$$\begin{aligned} dF(A) \cdot X &= \frac{1}{2} dF(A)(AH) = \frac{1}{2} [(AH)^* A + A^* AH] \\ &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{H^* A^* A}_{F(A)=I_2} + \underbrace{A^* A}_{=I_2} H \right] = \frac{1}{2} [H^* + H] \end{aligned}$$

$\tilde{F} \quad \frac{1}{2} [H^* + H] = H.$ On a montré
comme $H \in V$
 $H^* = H$

la surjectivité de
 $dF(A) : \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \rightarrow V$
 $\forall A \in U(2).$

$\Rightarrow U(2) = F^{-1}(I_2)$ est une sous-variété de
 $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$ de dimension réelle $\dim_{\mathbb{R}} \text{Mat}_2(\mathbb{C}) - \dim_{\mathbb{R}} V$
 $= 8 - 4 = 4.$