

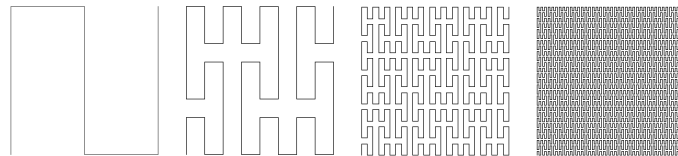
**FICHE TD 1 - COURBES PARAMÉTRÉES**

## LISTE DES EXERCICES

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| <b>Support des courbes paramétrées</b> . . . . .                | 2  |
| Exercice 1 — Tangentes, régularité et supports . . . . .        | 2  |
| Exercice 2 — Astroïde, néphroïde et chaînette . . . . .         | 5  |
| Exercice 3 — Enveloppes de droites : l'astroïde . . . . .       | 9  |
| Exercice 4 — Courbes en coordonnées polaires . . . . .          | 11 |
| <b>Longueur</b> . . . . .                                       | 16 |
| Exercice 5 — Additivité de la longueur . . . . .                | 16 |
| Exercice 6 — Rectifiabilité et reparamétrisation . . . . .      | 16 |
| Exercice 7 — Invariance de l'intégrale de longueur . . . . .    | 17 |
| Exercice 8 — Longueur de la cardioïde . . . . .                 | 18 |
| <b>Courbure</b> . . . . .                                       | 19 |
| Exercice 9 — Formules de courbure . . . . .                     | 19 |
| Exercice 10 — Courbes planes à courbure constante . . . . .     | 20 |
| Exercice 11 — Courbure en polaire et coniques . . . . .         | 21 |
| Exercice 12 — Spirale logarithmique . . . . .                   | 23 |
| Exercice 13 — Cycloïde . . . . .                                | 26 |
| Exercice 14 — Cercle osculateur et cercle de contact . . . . .  | 28 |
| Exercice 15 — Comparaison locale des cercles tangents . . . . . | 29 |
| Exercice 16 — Plans normaux et plans osculateurs . . . . .      | 30 |
| <b>Exercices facultatifs</b> . . . . .                          | 32 |
| Exercice 17 — Isométries de l'espace euclidien . . . . .        | 32 |
| Exercice 18 — Hélice circulaire . . . . .                       | 33 |
| Exercice 19 — Enveloppes, fronts et caustiques . . . . .        | 34 |
| Exercice 20 — Développées . . . . .                             | 39 |
| Exercice 21 — Développantes . . . . .                           | 43 |

**Exercice 1.**

- a) On considère une courbe plane paramétrée  $\gamma$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et régulière. Quelle est la limite des droites passant par  $\gamma(0)$  et  $\gamma(t)$  quand  $t$  tend vers 0 ?
- b) On considère un angle droit  $\Gamma = \{(x, 0) | x \geq 0\} \cup \{(0, y) | y \geq 0\}$  dans le plan :  Cette figure est-elle le *support* d'une courbe paramétrée ? Trouver un paramétrage  $C^0$ . Admet-elle aussi un paramétrage  $C^\infty$  ? *Indication* : utiliser la fonction  $f(t) = e^{-1/t^2}$ . Ce paramétrage est-il régulier au point  $O$  ? Peut-on avoir un paramétrage régulier en  $O$  ?
- c) On considère la **courbe cuspidale**  $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Dessiner la courbe autour de  $t = 0$ . Est-elle régulière en  $(0, 0)$  ? Soit  $\Gamma$  la partie de cette courbe décrite par  $t \in [0, \infty)$ . Donner un paramétrage  $C^1$  de  $\Gamma$  qui soit régulier en  $(0, 0)$ . Montrer qu'il n'y a pas de paramétrage  $C^2$  de  $\Gamma$  qui soit régulier en  $(0, 0)$ .
- d) Trouver un paramétrage de la courbe  $\gamma(t) = (t^3, t^4 + t^5)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , qui soit régulier en  $(0, 0)$ .
- e) [Facultatif.] Est-il vrai que toute courbe paramétrée  $C^0$  admet aussi une paramétrisation  $C^\infty$  ? *Indication* : Regarder la **courbe de Peano** <https://www.mathcurve.com/fractals/peano/peano.shtml>



Déterminer la mesure de son support. Comparer ce résultat à celui pour une courbe paramétrée  $C^1$ .

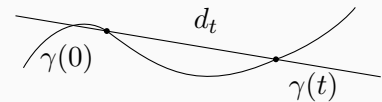
**Corrigé**

- a) **Limite des droites sécantes.** Soit  $\gamma$  une courbe plane, régulière et de classe  $C^1$ .

- **Quelle est la limite des droites passant par  $\gamma(0)$  et  $\gamma(t)$  lorsque  $t \rightarrow 0$  ?**

La droite  $d_t$  est paramétrée par  $u \in \mathbb{R}$  :

$$d_t(u) = \gamma(0) + u \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t - 0}.$$



La dérivabilité de  $\gamma$  en 0 permet d'écrire

$$\gamma(t) = \gamma(0) + t\gamma'(0) + t\varepsilon(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0,$$

où  $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^2$ . Ainsi,

$$d_t(u) = \gamma(0) + u(\gamma'(0) + \varepsilon(t)) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \gamma(0) + u\gamma'(0).$$

Comme  $\gamma'(0) \neq 0$ , la limite est la **droite tangente**

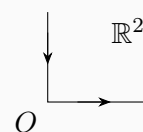
$$d(u) = \gamma(0) + u\gamma'(0), \quad u \in \mathbb{R}.$$

- b) **L'angle droit.** On considère

$$\Gamma = \{(x, 0) | x \geq 0\} \cup \{(0, y) | y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

- **Est-il le support d'une courbe paramétrée ?** Oui. Un paramétrage continu est donné par

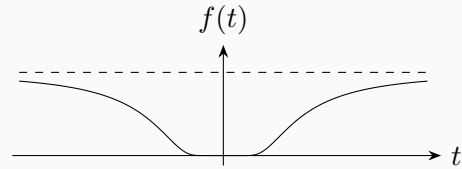
$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0), & t \geq 0, \\ (0, -t), & t < 0. \end{cases}$$



- **Trouver un paramétrage  $C^\infty$ .** On utilise la fonction  $f(t) = e^{-1/t^2}$ , pour  $t \neq 0$ , prolongée en 0 par  $f(0) = 0$ .

On a

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} e^{-1/t^2} = 0.$$



**Remarque :**  $f$  est de classe  $C^\infty$ . Pour  $t \neq 0$ ,

$$f'(t) = \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2}$$

est bien définie. Sa limite en 0 se calcule en appliquant deux fois la règle de l'Hôpital, séparément à droite et à gauche :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f'(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} 2 \frac{1/t^3}{e^{1/t^2}} \\ &\stackrel{\text{H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} 2 \frac{-3/t^4}{e^{1/t^2}(-2/t^3)} = \lim_{t \rightarrow 0} 3 \frac{1/t}{e^{1/t^2}} \\ &\stackrel{\text{H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} 3 \frac{-1/t^2}{e^{1/t^2}(-2/t^3)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3}{2} t e^{-1/t^2} = 0. \end{aligned}$$

De plus,

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-1/t^2}}{t} = 0.$$

La dérivée  $f'$  est donc continue en 0. Plus généralement, pour tout  $n \geq 0$  et  $t \neq 0$ ,

$$f^{(n)}(t) = P_n(1/t) e^{-1/t^2},$$

où  $P_n$  est un polynôme. Comme  $t^{-m} e^{-1/t^2} \rightarrow 0$  pour tout entier  $m \geq 0$ , ces expressions et leurs quotients par  $t$  tendent vers 0. Par récurrence,  $f$  est donc de classe  $C^\infty$  et toutes ses dérivées en 0 sont nulles.

Posons alors

$$\gamma(t) = \begin{cases} (tf(t), 0), & t > 0, \\ (0, 0), & t = 0, \\ (0, -tf(t)), & t < 0. \end{cases}$$

On obtient

$$\gamma'(t) = \begin{cases} (f(t) + tf'(t), 0), & t > 0, \\ (0, 0), & t = 0, \\ (0, -f(t) - tf'(t)), & t < 0. \end{cases}$$

Les dérivées de tous ordres se raccordent de la même façon en 0. Donc  $\gamma$  est de classe  $C^\infty$ . Comme  $t \mapsto tf(t)$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , nulle en 0 et tend vers  $+\infty$ , son image est  $[0, +\infty[$ . On a donc bien  $\text{supp}(\gamma) = \Gamma$ .

- **Ce paramétrage est-il régulier en  $(0, 0)$  ?** Non, car  $\gamma'(0) = (0, 0)$ .
- **Peut-on avoir un paramétrage régulier en  $(0, 0)$  ?** Non. Si un paramétrage  $\gamma$  était régulier en  $(0, 0) = \gamma(0)$ , le vecteur  $\gamma'(0)$  déterminerait la droite tangente à  $\Gamma$  en  $\gamma(0)$ . Or le support de  $\gamma$  n'admet pas de droite tangente en  $(0, 0)$ .

c) **La courbe cuspidale.** On considère  $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ .

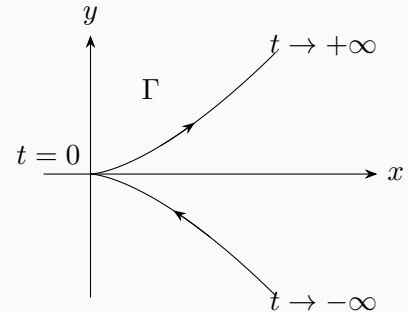
- **Dessiner la courbe.** On a  $\gamma(0) = (0, 0)$  et

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases} \implies y = \pm x^{3/2}.$$

- **Est-elle régulière en  $(0, 0)$  ?** On a

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2) \implies \gamma'(0) = (0, 0).$$

Le paramétrage n'est donc pas régulier en  $(0, 0) = \gamma(0)$ .



- **Trouver un paramétrage  $C^1$  régulier de la demi-courbe.** Soit

$$\Gamma = \{\gamma(t) = (t^2, t^3) \mid t \geq 0\}.$$

Pour  $t \geq 0$ , on a  $y = x^{3/2}$ . Le paramétrage

$$\gamma(x) = (x, x^{3/2}), \quad x \geq 0,$$

est de classe  $C^1$ , et

$$\gamma'(x) = \left(1, \frac{3}{2}\sqrt{x}\right) \implies \gamma'(0) = (1, 0) \neq \vec{0}.$$

Il est donc régulier en  $(0, 0)$ .

- **Montrer qu'il n'y a pas de paramétrage  $C^2$  de  $\Gamma$  régulier en  $(0, 0)$ .**

Tout d'abord, le paramétrage  $\gamma(x) = (x, x^{3/2})$  ci-dessus est de classe  $C^1$  et régulier en  $(0, 0)$ , mais sa dérivée seconde  $\gamma''(x) = (0, \frac{3}{4\sqrt{x}})$  n'est pas définie en  $x = 0$ . Il n'est donc pas de classe  $C^2$ .

Par l'absurde, supposons qu'il existe un paramétrage  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , défini pour  $t \in [0, \eta[$  avec  $\eta > 0$ , de classe  $C^2$  et régulier en  $t = 0$ , tel que

$$x(t), y(t) \geq 0, \quad x(0) = y(0) = 0, \quad y(t) = x(t)^{3/2}.$$

Les dérivées en 0 sont prises à droite. On a

$$y'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{x(t)} \frac{x(t)}{t} = 0.$$

La régularité en 0 impose donc  $x'(0) \neq 0$ . De plus,  $x(t) \geq 0$  pour  $t \geq 0$  et  $x(0) = 0$ , d'où  $x'(0) > 0$ . Par conséquent  $x(t) > 0$  pour  $t > 0$  suffisamment petit. On peut alors dériver deux fois :

$$y'(t) = \frac{3}{2}\sqrt{x(t)} x'(t), \quad y''(t) = \frac{3 x'(t)^2}{4\sqrt{x(t)}} + \frac{3}{2}\sqrt{x(t)} x''(t).$$

Lorsque  $t \rightarrow 0^+$ , la continuité de  $x'$ , de  $x''$  et de  $x$  donne

$$\frac{3 x'(t)^2}{4\sqrt{x(t)}} \longrightarrow +\infty, \quad \frac{3}{2}\sqrt{x(t)} x''(t) \longrightarrow 0.$$

Ainsi  $y''(t) \rightarrow +\infty$ , ce qui contredit la continuité de  $y''$  en 0. Il n'existe donc **aucun paramétrage  $C^2$  de  $\Gamma$  régulier en  $(0, 0)$ .**

d) **La courbe  $\gamma(t) = (t^3, t^4 + t^5)$ .**

- **Trouver un paramétrage de cette courbe régulier en  $(0, 0)$ .**

D'abord,

$$\gamma'(t) = (3t^2, 4t^3 + 5t^4) \implies \gamma'(0) = (0, 0).$$

Ce paramétrage n'est pas régulier en  $t = 0$ .

Posons  $x = t^3$  comme nouveau paramètre :  $t = x^{1/3}$ , donc  $y(x) = x^{4/3} + x^{5/3}$ . La dérivée

$$y'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{5}{3}x^{2/3}$$

est bien définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Donc

$$\alpha(x) = (x, x^{4/3} + x^{5/3}), \quad x \in \mathbb{R},$$

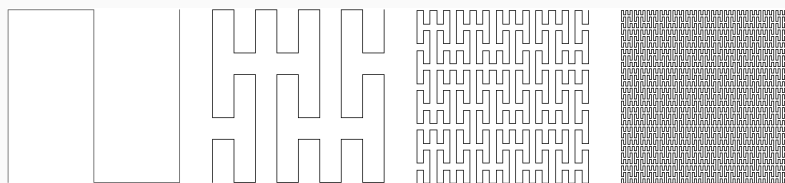
est un paramétrage de classe  $C^1$ , avec  $\alpha'(0) = (1, 0) \neq (0, 0)$ . Ainsi  $\alpha$  est régulière en  $x = 0$ .

• **Remarque.**  $y''(x)$  n'est pas définie en  $x = 0$ ;  $\alpha$  n'est donc pas de classe  $C^2$ .

e) Une courbe  $C^0$  admet-elle toujours un paramétrage  $C^\infty$ ? [Facultatif.]

• **Non.** La courbe de Peano est un contre-exemple : elle est continue, mais elle n'admet pas de paramétrage  $C^1$ , car son support est le carré  $[0, 1]^2$ , de mesure 1, alors que le support d'une courbe  $C^1$  est de mesure 0.

• **Complément : la courbe de Peano, ou courbe qui remplit le carré.**



Construction itérative de la courbe de Peano.

• **Déterminer la mesure du support de la courbe de Peano.** La construction itérative donne une suite de courbes qui converge uniformément vers une courbe continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  dont l'image est dense dans le carré. Or l'image d'un compact par une application continue est compacte, donc fermée dans  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi

$$\text{supp}(\gamma) = [0, 1]^2, \quad m_2(\text{supp}(\gamma)) = 1.$$

Ici  $m_2$  désigne la mesure de Lebesgue dans le plan, c'est-à-dire l'aire.

• **Comparer avec le support d'une courbe  $C^1$ .** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe de classe  $C^1$ . Sa dérivée est bornée : choisissons une constante  $C \geq 1$  telle que  $\|\gamma'(t)\| \leq C$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . On a alors

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\| \leq C|t - s|.$$

Fixons  $\varepsilon > 0$  et posons  $N = \lceil C/\varepsilon \rceil$ . Pour chaque  $k \in \{0, \dots, N-1\}$ , l'image de  $[k/N, (k+1)/N]$  est contenue dans le disque fermé de centre  $\gamma(k/N)$  et de rayon  $\varepsilon$ , puisque  $C/N \leq \varepsilon$ . Ces  $N$  disques recouvrent donc le support de  $\gamma$ , et

$$0 \leq m_2(\gamma([0, 1])) \leq N\pi\varepsilon^2 \leq \pi(C\varepsilon + \varepsilon^2) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Le support d'une courbe  $C^1$  a donc une aire nulle. Le même résultat vaut sur tout intervalle, en l'écrivant comme une réunion dénombrable d'intervalles compacts.

La courbe de Peano ne peut donc pas admettre de paramétrage  $C^1$ , et a fortiori pas de paramétrage  $C^\infty$ .

**Exercice 2.** Pour les courbes suivantes, trouver les symétries, les points singuliers (qu'on étudiera à l'aide d'un développement limité), ainsi qu'une équation décrivant le support de la courbe en coordonnées cartésiennes. Enfin, dessiner chaque courbe.

a) L'**astroïde**  $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ ,  $t \in [0, 2\pi[$ .

b) La **néphroïde**  $\gamma(t) = (3 \cos t - \cos(3t), 3 \sin t - \sin(3t)) = (6 \cos t - 4 \cos^3 t, 4 \sin^3 t)$ ,  $t \in [0, 2\pi[$ .

c) La **chaînette**  $\gamma(t) = (\ln t, t + \frac{1}{t})$ ,  $t > 0$ .

Dans les questions a) et b), on prolonge les paramétrages par  $2\pi$ -périodicité ; les changements de paramètre sont donc compris modulo  $2\pi$ . Une symétrie du support est une isométrie  $T$  telle que  $T(\text{supp}(\gamma)) = \text{supp}(\gamma)$ .

a) **L'astroïde.** On considère  $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ .

• **Déterminer les points singuliers et les étudier.** On a

$$\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t) = 3\sin t \cos t (-\cos t, \sin t).$$

Ainsi  $\gamma'(t) = 0$  si et seulement si  $t \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$  modulo  $2\pi$ . Les quatre points singuliers sont

$$(1, 0), \quad (0, 1), \quad (-1, 0), \quad (0, -1).$$

Au voisinage de  $t = 0$ , les développements limités donnent

$$\cos^3 t = \left(1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4)\right)^3 = 1 - \frac{3}{2}t^2 + O(t^4),$$

$$\sin^3 t = (t + O(t^3))^3 = t^3 + O(t^5).$$

Par conséquent,

$$\gamma(t) = (1, 0) + t^2 \left(-\frac{3}{2}, 0\right) + t^3(0, 1) + (O(t^4), O(t^5)).$$

Les premiers vecteurs non nuls, d'ordres 2 et 3, sont indépendants :  $(1, 0)$  est un **point de rebroussement de première espèce**, de tangente horizontale. Par les symétries ci-dessous, il en est de même aux trois autres points singuliers : la tangente est horizontale en  $(-1, 0)$  et verticale en  $(0, \pm 1)$ .

• **Trouver les symétries.** La rotation  $R_{\pi/2}$  d'angle  $\pi/2$  et la réflexion  $S_x$  par rapport à l'axe  $Ox$  vérifient

$$R_{\pi/2}\gamma(t) = (-\sin^3 t, \cos^3 t) = \gamma(t + \pi/2), \quad S_x\gamma(t) = (\cos^3 t, -\sin^3 t) = \gamma(-t).$$

Elles préservent donc le support. Leurs compositions donnent les rotations d'angles  $\pi/2$ ,  $\pi$  et  $3\pi/2$ , ainsi que les réflexions par rapport aux quatre droites

$$y = 0, \quad x = 0, \quad y = x, \quad y = -x.$$

Par exemple,

$$R_{\pi}\gamma(t) = (-\cos^3 t, -\sin^3 t) = \gamma(t + \pi).$$

• **Déterminer une équation cartésienne du support.** Si  $x = \cos^3 t$  et  $y = \sin^3 t$ , alors

$$\boxed{|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1.}$$

Réciproquement, cette égalité implique que les racines cubiques réelles  $\sqrt[3]{x}$  et  $\sqrt[3]{y}$  sont les coordonnées d'un point du cercle unité ; elles s'écrivent donc  $\cos t$  et  $\sin t$ .

Pour obtenir une équation polynomiale, on calcule

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= \cos^6 t + \sin^6 t - 1 \\ &= (\cos^2 t + \sin^2 t)^3 - 3\cos^2 t \sin^2 t - 1 = -3\cos^2 t \sin^2 t. \end{aligned}$$

En élevant au cube, on obtient

$$\boxed{(x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2 y^2 = 0.}$$

Cette équation n'ajoute pas de points au support. En effet, avec  $u = |x|^{2/3}$  et  $v = |y|^{2/3}$ , elle équivaut à

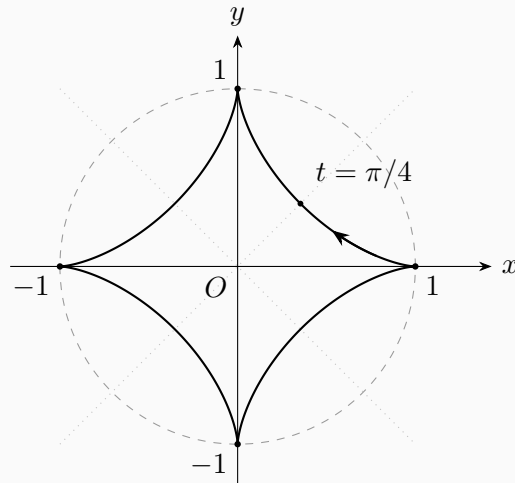
$$u^3 + v^3 + 3uv - 1 = (u + v - 1)(u^2 + v^2 + 1 - uv + u + v) = 0,$$

et le second facteur est strictement positif pour  $u, v \geq 0$ .

• **Dessiner la courbe.** La courbe est contenue dans le disque unité, puisque  $\cos^6 t + \sin^6 t \leq \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ . La première portion, pour  $0 \leq t \leq \pi/2$ , relie  $(1, 0)$  à  $(0, 1)$  en passant par

$$\gamma(\pi/4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Les autres portions s'obtiennent par les symétries.



b) **La néphroïde.** On utilise l'expression

$$\gamma(t) = (6 \cos t - 4 \cos^3 t, 4 \sin^3 t).$$

- **Déterminer les points singuliers et les étudier.** La dérivée se simplifie en

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (-6 \sin t + 12 \cos^2 t \sin t, 12 \sin^2 t \cos t) \\ &= 6 \sin t (\cos(2t), \sin(2t)). \end{aligned}$$

Elle s'annule exactement pour  $t = 0$  ou  $t = \pi$  modulo  $2\pi$ . Il y a donc deux points singuliers :

$$\gamma(0) = (2, 0), \quad \gamma(\pi) = (-2, 0).$$

Au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} x(t) &= 6 \left( 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4) \right) - 4 \left( 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4) \right)^3 = 2 + 3t^2 + O(t^4), \\ y(t) &= 4(t + O(t^3))^3 = 4t^3 + O(t^5). \end{aligned}$$

Ainsi  $(2, 0)$  est un **point de rebroussement de première espèce**, de tangente horizontale. Il en est de même de  $(-2, 0)$  par symétrie.

- **Trouver les symétries.** On vérifie que

$$\gamma(-t) = (x(t), -y(t)), \quad \gamma(\pi - t) = (-x(t), y(t)), \quad \gamma(t + \pi) = -\gamma(t).$$

Le support est donc invariant par réflexion par rapport à chacun des axes  $Ox$  et  $Oy$ , ainsi que par la rotation d'angle  $\pi$  autour de  $O$ .

- **Déterminer une équation cartésienne du support.** En posant  $c = \cos t$  et  $s = \sin t$ , on a

$$x^2 = 36c^2 - 48c^4 + 16c^6, \quad y^2 = 16s^6 = 16 - 48c^2 + 48c^4 - 16c^6.$$

D'où

$$x^2 + y^2 = 16 - 12c^2 = 4 + 12s^2, \quad (x^2 + y^2 - 4)^3 = 12^3 s^6 = 108y^2.$$

On obtient l'équation

$$(x^2 + y^2 - 4)^3 - 108y^2 = 0.$$

Réciproquement, si un point satisfait cette équation, posons  $s = \sqrt[3]{y/4}$ . En prenant la racine cubique réelle, puis en factorisant, on trouve

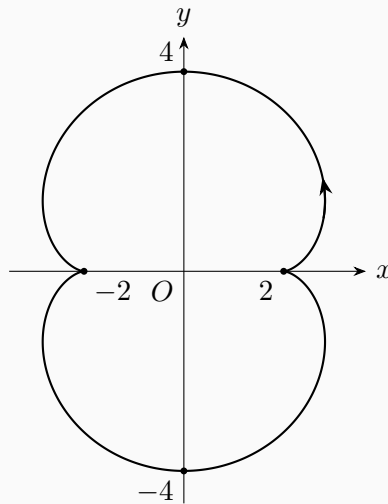
$$x^2 = 4 + 12s^2 - 16s^6 = 4(1 - s^2)(1 + 2s^2)^2.$$

Ainsi  $|s| \leq 1$  et  $c = x/[2(1 + 2s^2)]$  vérifie  $c^2 + s^2 = 1$ . Pour un angle  $t$  tel que  $(\cos t, \sin t) = (c, s)$ , on retrouve  $x = 6 \cos t - 4 \cos^3 t$  et  $y = 4 \sin^3 t$ .

- **Dessiner la courbe.** Les quatre valeurs

$$\gamma(0) = (2, 0), \quad \gamma(\pi/2) = (0, 4), \quad \gamma(\pi) = (-2, 0), \quad \gamma(3\pi/2) = (0, -4)$$

permettent de situer la courbe. Sur  $[0, \pi/2]$ , l'ordonnée croît de 0 à 4 ; l'abscisse atteint son maximum  $2\sqrt{2}$  en  $t = \pi/4$ , puis décroît jusqu'à 0. On complète le dessin par symétrie.



c) **La chaînette.** On considère  $\gamma(t) = (\ln t, t + 1/t)$ , avec  $t > 0$ .

- **Déterminer les points singuliers.** On a

$$\gamma'(t) = \left( \frac{1}{t}, 1 - \frac{1}{t^2} \right) \neq (0, 0) \quad \text{pour tout } t > 0.$$

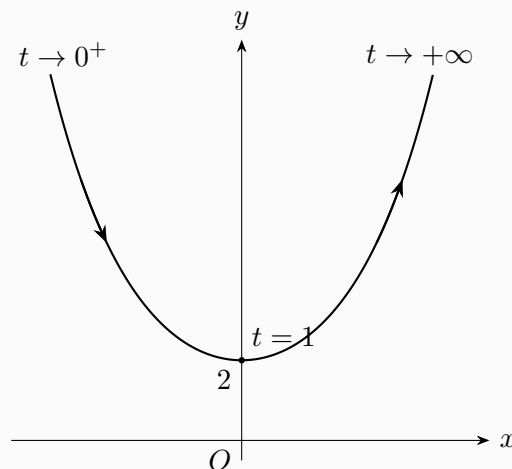
La courbe est donc régulière en tout point.

- **Déterminer l'équation cartésienne et les symétries.** En éliminant le paramètre,

$$x = \ln t \iff t = e^x, \quad \boxed{y = e^x + e^{-x} = 2 \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

La chaînette est le graphe de la fonction paire  $x \mapsto 2 \cosh x$  ; elle est donc symétrique par rapport à l'axe  $Oy$ . Cela se lit également sur le paramétrage :  $\gamma(1/t) = (-\ln t, t + 1/t)$ .

- **Dessiner la courbe.** Le graphe est strictement convexe, puisque  $(2 \cosh x)'' = 2 \cosh x > 0$ . Il atteint son minimum au point  $(0, 2) = \gamma(1)$ . Quand  $t \rightarrow 0^+$ , on a  $x \rightarrow -\infty$  et  $y \rightarrow +\infty$  ; quand  $t \rightarrow +\infty$ , les deux coordonnées tendent vers  $+\infty$ .



**Exercice 3.** Soit  $\{D_t, t \in I\}$  une famille de droites du plan. L'enveloppe de la famille  $\{D_t\}$  est une courbe  $\gamma(t)$ ,  $t \in I$  dont les droites  $D_t$  sont les tangentes.

- a) Supposons que les droites  $D_t$  soient décrites par l'équation  $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ , où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des fonctions de classe  $C^1$ . Montrer que l'enveloppe  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  vérifie le système

$$\begin{aligned} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) &= 0 \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) &= 0. \end{aligned}$$

En déduire une représentation paramétrique de  $\gamma(t)$ .

- b) Exemple : on considère un segment de longueur  $L$  dont les extrémités glissent le long des côtés d'un angle droit (une échelle posée contre un mur). L'astroïde est la frontière de la zone balayée par le segment. Déterminer l'astroïde comme courbe paramétrée et comme graphe d'une fonction.

### Corrigé

- a) **Enveloppe d'une famille de droites.** On écrit

$$D_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a(t)x + b(t)y + c(t) = 0\}, \quad (a(t), b(t)) \neq (0, 0).$$

- **Montrer que l'enveloppe vérifie le système annoncé.** Soit  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  une enveloppe. Comme  $\gamma(t) \in D_t$ , on a

$$a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0.$$

En dérivant cette identité, on obtient

$$a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0.$$

Or  $(a(t), b(t))$  est un vecteur normal à  $D_t$ , tandis que  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$  est parallèle à cette droite tangente. Ainsi

$$ax' + by' = \langle (a, b), (x', y') \rangle = 0.$$

On en déduit

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

- **En déduire une représentation paramétrique de l'enveloppe.** Posons  $\Delta(t) = a(t)b'(t) - a'(t)b(t)$ . Lorsque  $\Delta(t) \neq 0$ , le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -c' \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ab' - a'b} \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c \\ -c' \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si l'enveloppe existe, son paramétrage est nécessairement

$$\gamma(t) = \left( \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b} \right).$$

Réciproquement, si les fonctions ainsi obtenues définissent une courbe  $C^1$  régulière, les deux équations du système impliquent  $ax' + by' = 0$ ; la droite  $D_t$  est donc bien sa tangente. La condition  $\Delta \neq 0$  assure l'unicité de la solution du système, mais ne garantit pas à elle seule sa régularité.

- b) **L'échelle de longueur  $L > 0$ .**

- **Déterminer l'enveloppe en utilisant la position d'une extrémité.** Soit  $t \in ]0, L[$  la distance à l'origine de l'extrémité située sur  $Ox$ . Les deux extrémités sont

$$A(t) = (t, 0), \quad B(t) = \left( 0, \sqrt{L^2 - t^2} \right).$$

La droite qui porte l'échelle a pour équation

$$D_t : \sqrt{L^2 - t^2}x + ty - t\sqrt{L^2 - t^2} = 0.$$

## Corrigé (suite)

On pose donc

$$a(t) = \sqrt{L^2 - t^2}, \quad b(t) = t, \quad c(t) = -t\sqrt{L^2 - t^2},$$

et l'on calcule

$$a'(t) = -\frac{t}{\sqrt{L^2 - t^2}}, \quad b'(t) = 1, \quad c'(t) = \frac{2t^2 - L^2}{\sqrt{L^2 - t^2}}.$$

Le déterminant vaut

$$ab' - a'b = \sqrt{L^2 - t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{L^2 - t^2}} = \frac{L^2}{\sqrt{L^2 - t^2}} > 0.$$

La formule de la question a) donne alors

$$x(t) = \frac{\sqrt{L^2 - t^2}}{L^2} \left( \frac{t(2t^2 - L^2)}{\sqrt{L^2 - t^2}} + t\sqrt{L^2 - t^2} \right) = \frac{t^3}{L^2},$$

$$y(t) = \frac{\sqrt{L^2 - t^2}}{L^2} (t^2 - (2t^2 - L^2)) = \frac{(L^2 - t^2)^{3/2}}{L^2}.$$

D'où le paramétrage

$$\gamma(t) = \left( \frac{t^3}{L^2}, \frac{(L^2 - t^2)^{3/2}}{L^2} \right), \quad 0 < t < L.$$

Il est régulier sur  $]0, L[$ , puisque  $x'(t) = 3t^2/L^2 > 0$ . Il se prolonge continûment aux points  $(0, L)$  et  $(L, 0)$ .

• **Retrouver le résultat avec le paramètre angulaire.** Soit  $\theta \in ]0, \pi/2[$  l'angle de l'échelle avec la verticale. Ses extrémités sont alors

$$A(\theta) = (L \sin \theta, 0), \quad B(\theta) = (0, L \cos \theta).$$

La droite qui les joint est

$$D_\theta : \cos \theta x + \sin \theta y = L \sin \theta \cos \theta = \frac{L}{2} \sin(2\theta).$$

Avec  $a = \cos \theta$ ,  $b = \sin \theta$  et  $c = -L \sin \theta \cos \theta$ , on a

$$a' = -\sin \theta, \quad b' = \cos \theta, \quad c' = L(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta), \quad ab' - a'b = 1.$$

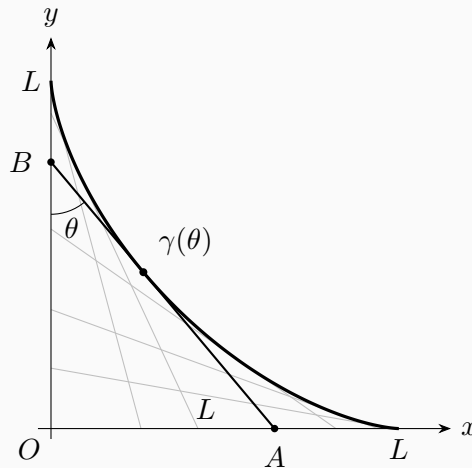
Ainsi

$$x(\theta) = L \sin \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + L \sin \theta \cos^2 \theta = L \sin^3 \theta,$$

$$y(\theta) = L \sin^2 \theta \cos \theta - L \cos \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = L \cos^3 \theta.$$

On retrouve donc

$$\gamma(\theta) = (L \sin^3 \theta, L \cos^3 \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$



## Corrigé (suite)

- **Écrire l'enveloppe comme graphe d'une fonction.** En éliminant  $\theta$ , on obtient

$$x^{2/3} + y^{2/3} = L^{2/3}, \quad x, y \geq 0.$$

La partie courbe de la frontière est donc le graphe

$$y = (L^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Le mouvement dans l'angle droit ne décrit que l'arc du premier quadrant. La frontière complète de la zone balayée comprend aussi les deux segments des axes reliant  $O$  à  $(L, 0)$  et à  $(0, L)$ . En réfléchissant l'arc par rapport aux axes, on obtient l'astroïde complète

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = L^{2/3}.$$

**Exercice 4.** Une **courbe (en) polaire** est une courbe plane  $\gamma$  paramétrée par la distance à l'origine en fonction de l'angle de rotation autour de l'origine, dans le sens antihoraire à partir de l'axe  $\vec{Ox}$ , c'est-à-dire la courbe

$$\gamma(\varphi) = (r(\varphi) \cos(\varphi), r(\varphi) \sin(\varphi)) = r(\varphi) e^{i\varphi},$$

où  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\varphi \mapsto r(\varphi)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- Sous quelles conditions une courbe polaire est-elle régulière ? Quels peuvent être les points singuliers ?
- Montrer qu'une courbe plane régulière  $\gamma$  qui évite l'origine admet une paramétrisation comme courbe polaire si et seulement si le vecteur vitesse  $\gamma'$  n'est jamais proportionnel au vecteur position  $\gamma$ .
- Pour quelles valeurs des paramètres réels  $a, b, c$  la droite d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  admet-elle une paramétrisation polaire ? Écrire cette paramétrisation dans ces cas.
- Écrire une paramétrisation de la courbe cuspidale  $\gamma(t) = (t^2, t^3)$  en polaire, pour  $t > 0$ .
- Dessiner la courbe  $r = \cos(n\varphi) + 2$  pour  $n = 1, 2, 3$ .
- [Facultatif.] Étudier les courbes définies par  $r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$ , où  $p, e > 0$ , selon les cas  $e < 1$ ,  $e = 1$  et  $e > 1$ .

## Corrigé

On identifie  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$ . L'angle  $\varphi$  varie dans un intervalle  $J \subset \mathbb{R}$  adapté à la courbe, et le rayon  $r(\varphi)$  est **positif ou nul**, puisqu'il représente une distance à l'origine.

- Régularité d'une courbe polaire.**

- **Sous quelles conditions la courbe est-elle régulière ?** Pour  $\gamma(\varphi) = r(\varphi) e^{i\varphi}$ , on a

$$\gamma'(\varphi) = r'(\varphi) e^{i\varphi} + ir(\varphi) e^{i\varphi} = (r'(\varphi) + ir(\varphi)) e^{i\varphi}.$$

Les vecteurs  $e^{i\varphi}$  et  $ie^{i\varphi}$  sont orthonormés ; ainsi

$$\|\gamma'(\varphi)\|^2 = r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2.$$

Par conséquent,

$$\gamma \text{ est régulière en } \varphi \iff (r(\varphi), r'(\varphi)) \neq (0, 0).$$

- **Quels peuvent être les points singuliers ?** Un paramètre singulier vérifie  $r(\varphi) = r'(\varphi) = 0$  : le seul point du plan susceptible d'être singulier est donc **l'origine**. Avec la convention  $r \geq 0$ , si  $r(\varphi_0) = 0$  pour un paramètre  $\varphi_0$  intérieur à  $J$ , alors  $r$  atteint un minimum en  $\varphi_0$ , donc  $r'(\varphi_0) = 0$ . Un passage par l'origine à un paramètre intérieur est ainsi nécessairement singulier.

- Existence d'un changement de paramètre polaire.**

- **Montrer le critère de non-colinéarité de  $\gamma$  et  $\gamma'$ .** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe régulière de classe  $\mathcal{C}^1$ , définie sur un intervalle et ne passant pas par l'origine. On peut écrire

$$\gamma(t) = \rho(t) e^{i\varphi(t)}, \quad \rho(t) = \|\gamma(t)\| > 0,$$

en choisissant sur  $I$  un relèvement réel  $\varphi(t)$  de l'angle, de classe  $\mathcal{C}^1$ . On dérive :

$$\gamma'(t) = \rho'(t) e^{i\varphi(t)} + \rho(t) \varphi'(t) i e^{i\varphi(t)}.$$

Le premier terme est parallèle au vecteur position  $\gamma(t)$ , et le second lui est orthogonal. Puisque  $\rho(t) > 0$ ,

$$\gamma'(t) \text{ n'est pas colinéaire à } \gamma(t) \iff \varphi'(t) \neq 0.$$

De façon équivalente,

$$\det(\gamma(t), \gamma'(t)) = \rho(t)^2 \varphi'(t).$$

Si cette quantité ne s'annule jamais, la fonction continue  $\varphi'$  garde un signe constant sur  $I$ . L'application  $t \mapsto \varphi(t)$  est donc strictement monotone et définit un difféomorphisme  $C^1$  de  $I$  sur son image  $J$ . En notant  $t = t(\varphi)$  son inverse, on obtient le paramétrage polaire

$$\tilde{\gamma}(\varphi) = r(\varphi)e^{i\varphi}, \quad r(\varphi) = \rho(t(\varphi)), \quad \varphi \in J.$$

Réciproquement, pour un tel paramétrage avec  $r > 0$ ,

$$\det(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}') = r^2 > 0.$$

Après un changement de paramètre  $C^1$ , de dérivée non nulle, le déterminant reste non nul. Cela prouve l'équivalence.

### c) Paramétrisation polaire d'une droite.

• **Pour quels  $a, b, c$  la droite  $ax + by + c = 0$  admet-elle un paramétrage polaire ?** On suppose  $(a, b) \neq (0, 0)$ , afin que l'équation définisse bien une droite. Si  $c = 0$ , la droite passe par l'origine, et tout vecteur tangent est colinéaire au vecteur position aux points non nuls. Elle n'admet donc pas de paramétrage polaire régulier par changement de paramètre.

Si  $c \neq 0$ , la droite ne passe pas par l'origine : un vecteur directeur ne peut être colinéaire à la position d'un de ses points. Le critère de la question b) s'applique.

• **Écrire ce paramétrage et préciser son domaine.** En remplaçant  $x$  et  $y$  par  $r \cos \varphi$  et  $r \sin \varphi$ , on trouve

$$r(\varphi)(a \cos \varphi + b \sin \varphi) + c = 0.$$

Ainsi

$$r(\varphi) = \frac{-c}{a \cos \varphi + b \sin \varphi}, \quad \gamma(\varphi) = \frac{-c e^{i\varphi}}{a \cos \varphi + b \sin \varphi}.$$

On prend pour  $J$  un intervalle de longueur  $\pi$  sur lequel

$$c(a \cos \varphi + b \sin \varphi) < 0.$$

Sur cet intervalle, le dénominateur ne s'annule pas et  $r > 0$ ; le paramétrage décrit toute la droite, une seule fois. Les angles aux extrémités de  $J$  correspondent aux directions parallèles à la droite. En résumé, pour  $(a, b) \neq (0, 0)$ , le paramétrage demandé existe **si et seulement si**  $c \neq 0$ .

### d) Paramétrisation polaire de la demi-courbe cuspidale.

• **Écrire  $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ ,  $t > 0$ , en coordonnées polaires.** Les deux coordonnées sont strictement positives; on prend donc  $\varphi \in ]0, \pi/2[$ . On a

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} = t, \quad t = \tan \varphi.$$

Comme  $x = r \cos \varphi = t^2$ , on obtient

$$r(\varphi) = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi}, \quad \tilde{\gamma}(\varphi) = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} e^{i\varphi}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

On peut aussi retrouver cette expression à partir de  $x^3 = y^2 : r^3 \cos^3 \varphi = r^2 \sin^2 \varphi$ , puis on simplifie par  $r^2 > 0$ .

e) **Les courbes**  $r(\varphi) = 2 + \cos(n\varphi)$ .

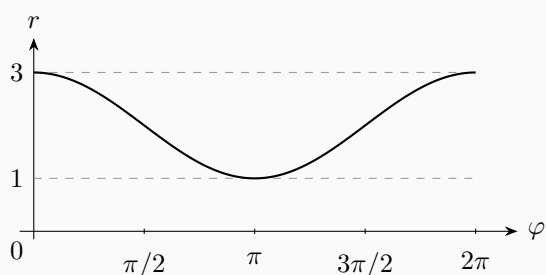
• **Dessiner les courbes pour**  $n = 1, 2, 3$ . On commence par tracer le graphe de  $\varphi \mapsto r(\varphi)$ , puis on reporte le rayon  $r(\varphi)$  dans la direction d'angle  $\varphi$ . Dans les trois cas,

$$1 \leq r(\varphi) \leq 3.$$

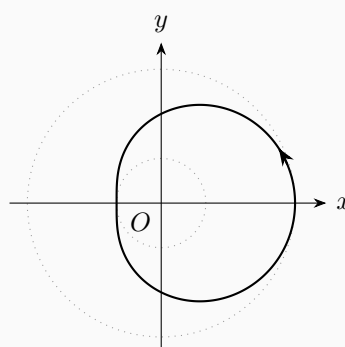
Les courbes sont donc contenues dans la couronne de rayons 1 et 3 et sont régulières, puisque  $r$  ne s'annule pas. Les maxima  $r = 3$  sont atteints pour  $\varphi = 2k\pi/n$  et les minima  $r = 1$  pour  $\varphi = (2k+1)\pi/n$ .

La périodicité  $r(\varphi + 2\pi/n) = r(\varphi)$  donne une symétrie de rotation d'angle  $2\pi/n$ . De plus,  $r(2k\pi/n - \varphi) = r(\varphi)$  : les droites d'angles  $k\pi/n$  sont des axes de symétrie. Ainsi, on obtient l'axe  $Ox$  pour  $n = 1$ , les deux axes de coordonnées pour  $n = 2$ , et les trois droites d'angles  $0, \pi/3$  et  $2\pi/3$  pour  $n = 3$ .

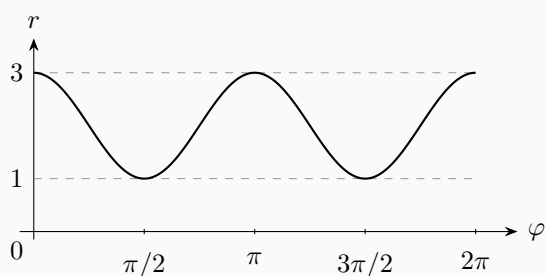
$n = 1$  : rayon en fonction de l'angle



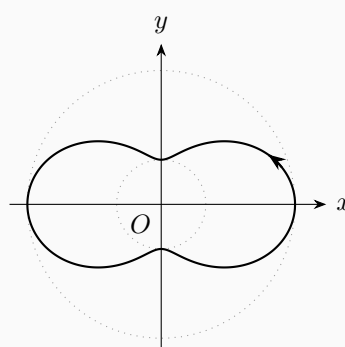
Support dans le plan



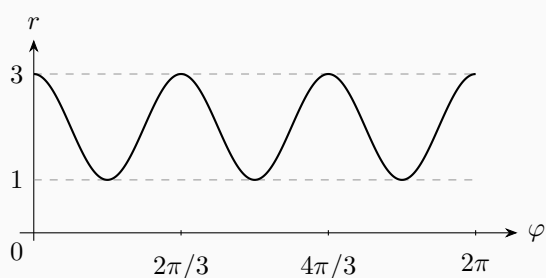
$n = 2$  : rayon en fonction de l'angle



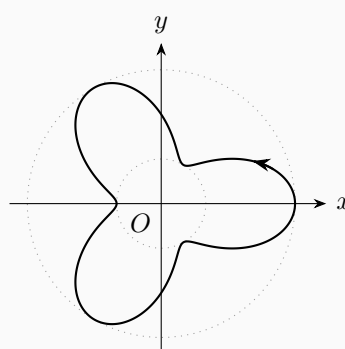
Support dans le plan



$n = 3$  : rayon en fonction de l'angle



Support dans le plan



f) **Les coniques**  $r(\varphi) = p/(1 - e \cos \varphi)$ . [Facultatif.]

• **Déterminer les supports selon les valeurs de**  $e > 0$ . On suppose  $p > 0$ . Comme  $r$  est une distance, on se place sur les intervalles où  $1 - e \cos \varphi > 0$ . En posant  $x = r \cos \varphi$  et  $y = r \sin \varphi$ , on obtient

$$r - er \cos \varphi = p \iff r = ex + p.$$

Or  $r^2 = x^2 + y^2$ , donc

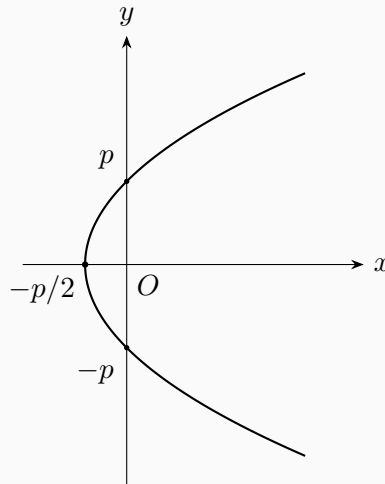
$$x^2 + y^2 = (ex + p)^2 \iff (1 - e^2)x^2 + y^2 - 2epx - p^2 = 0.$$

Il faut conserver la condition  $ex + p > 0$ , issue de  $r > 0$ , lorsqu'on passe de l'équation polaire à cette équation cartésienne.

**Cas  $e = 1$  : une parabole.** L'équation devient

$$y^2 = 2px + p^2, \quad x = \frac{y^2}{2p} - \frac{p}{2}.$$

C'est une parabole d'axe  $Ox$ , de sommet  $(-p/2, 0)$ , ouverte vers les  $x$  croissants. La condition  $x + p > 0$  est automatiquement vérifiée, puisque  $x + p = (y^2 + p^2)/(2p) > 0$ . Le domaine angulaire  $0 < \varphi < 2\pi$  décrit toute la parabole.



**Cas  $0 < e < 1$  : une ellipse.** On a  $1 - e \cos \varphi \geq 1 - e > 0$  pour tout  $\varphi$ . En complétant le carré, on trouve

$$(1 - e^2) \left( x - \frac{ep}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{1 - e^2}.$$

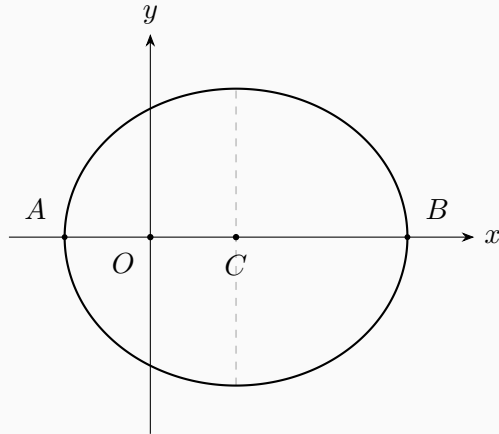
Donc

$$\frac{\left( x - \frac{ep}{1 - e^2} \right)^2}{\frac{p^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1 - e^2}} = 1.$$

C'est une ellipse de centre  $C = (ep/(1 - e^2), 0)$ , de demi-axes  $p/(1 - e^2)$  et  $p/\sqrt{1 - e^2}$ . Ses sommets sur  $Ox$  sont

$$A = \left( -\frac{p}{1 + e}, 0 \right) \quad \text{et} \quad B = \left( \frac{p}{1 - e}, 0 \right).$$

Le paramétrage,  $2\pi$ -périodique, décrit l'ellipse entière.



**Cas  $e > 1$  : une branche d'hyperbole.** Posons  $d = e^2 - 1 > 0$ . L'équation cartésienne s'écrit

$$d \left( x + \frac{ep}{d} \right)^2 - y^2 = \frac{p^2}{d},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\left( x + \frac{ep}{e^2 - 1} \right)^2}{\frac{p^2}{(e^2 - 1)^2}} - \frac{y^2}{\frac{p^2}{e^2 - 1}} = 1.$$

L'hyperbole a pour centre  $C = (-ep/(e^2 - 1), 0)$  et pour asymptotes

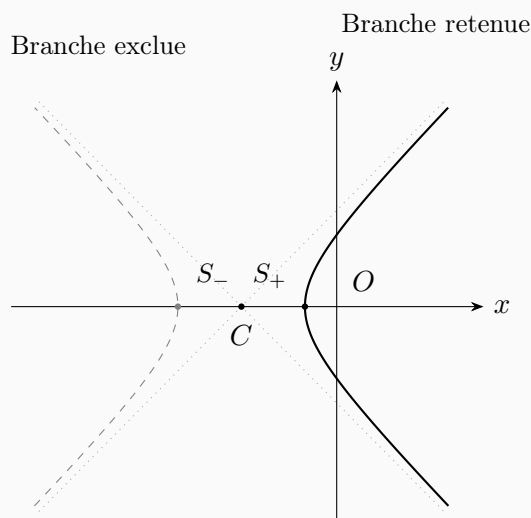
$$y = \pm \sqrt{e^2 - 1} \left( x + \frac{ep}{e^2 - 1} \right).$$

Ses sommets sont  $S_- = (-p/(e - 1), 0)$  et  $S_+ = (-p/(e + 1), 0)$ . La condition  $ex + p > 0$  sélectionne **la branche de droite**, caractérisée par  $x \geq -p/(e + 1)$ . La branche de gauche est exclue.

En posant  $\alpha = \arccos(1/e)$ , le domaine angulaire admissible est

$$\alpha < \varphi < 2\pi - \alpha \quad \text{modulo } 2\pi.$$

Le rayon tend vers  $+\infty$  aux deux extrémités de cet intervalle ; le point correspondant à  $\varphi = \pi$  est le sommet  $(-p/(e + 1), 0)$ .



**Exercice 5.** Soient  $a \leq c \leq b$  des réels et  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée continue. Montrer que

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]}).$$

**Corrigé**

• **Montrer l'additivité de la longueur.** Si  $c = a$  ou  $c = b$ , l'une des deux restrictions est constante sur un intervalle réduit à un point et sa longueur est nulle. Supposons donc  $a < c < b$ .

Pour une subdivision  $\sigma = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ , notons

$$L(\gamma|_\sigma) = \sum_{j=1}^N \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$$

la longueur de la ligne polygonale associée. Par définition,

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma} L(\gamma|_\sigma).$$

Raffiner une subdivision ne diminue pas cette longueur, par l'inégalité triangulaire. On peut donc se limiter aux subdivisions contenant  $c$  :

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma \ni c} L(\gamma|_\sigma).$$

Toute telle subdivision s'écrit  $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ , avec

$$\sigma_1 = \{a = t_0 < \dots < t_M = c\}, \quad \sigma_2 = \{c = t_M < \dots < t_N = b\}.$$

En séparant la somme en  $c$ , on obtient

$$\begin{aligned} L(\gamma|_\sigma) &= \sum_{j=1}^M \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| + \sum_{j=M+1}^N \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \\ &= L((\gamma|_{[a,c]})|_{\sigma_1}) + L((\gamma|_{[c,b]})|_{\sigma_2}). \end{aligned}$$

Réciproquement, on peut réunir n'importe quelle subdivision de  $[a, c]$  et n'importe quelle subdivision de  $[c, b]$ . Les deux subdivisions varient donc indépendamment. En prenant les supremums, il vient

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]}).$$

Cette égalité reste valable dans  $[0, +\infty]$ , même si la courbe n'est pas rectifiable.

**Exercice 6.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée continue et soit  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une *reparamétrisation* de  $\gamma$ , c'est-à-dire la courbe  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$  où  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  est le *changement de paramétrisation de classe  $C^0$*  (i.e.  $\varphi$  est un homéomorphisme). Montrer que  $\gamma$  est *rectifiable* si et seulement si  $\tilde{\gamma}$  l'est et, dans ce cas, que

$$L(\gamma) = L(\tilde{\gamma}).$$

Y a-t-il une différence que  $\varphi$  soit croissant ou décroissant ?

**Corrigé**

• **Montrer l'invariance de la rectifiabilité et de la longueur.** Rappelons que  $\gamma$  est rectifiable si et seulement si

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma} L(\gamma|_\sigma) < +\infty, \quad L(\gamma|_\sigma) = \sum_{j=1}^N \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|,$$

où  $\sigma = \{a = t_0 < \dots < t_N = b\}$  parcourt les subdivisions de  $[a, b]$ . L'homéomorphisme  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  est strictement monotone.

• **Si  $\varphi$  est croissant,** alors  $\varphi(c) = a$  et  $\varphi(d) = b$ . À chaque subdivision  $\sigma$  de  $[a, b]$ , on associe la subdivision

$$\tilde{\sigma} = \{c = s_0 < s_1 < \dots < s_N = d\}, \quad s_j = \varphi^{-1}(t_j).$$

## Corrigé (suite)

Cette correspondance entre les subdivisions des deux intervalles est bijective. Puisque  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ , on a

$$\begin{aligned} L(\tilde{\gamma}|_{\tilde{\sigma}}) &= \sum_{j=1}^N \|\tilde{\gamma}(s_j) - \tilde{\gamma}(s_{j-1})\| \\ &= \sum_{j=1}^N \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = L(\gamma|_{\sigma}). \end{aligned}$$

En prenant les supremums, on obtient

$$L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma).$$

• **Que se passe-t-il si  $\varphi$  est décroissant ?** On a alors  $\varphi(c) = b$  et  $\varphi(d) = a$ . Il suffit de renverser l'ordre des points en posant

$$s_j = \varphi^{-1}(t_{N-j}), \quad j = 0, \dots, N.$$

On obtient encore une subdivision croissante de  $[c, d]$ , et

$$\begin{aligned} L(\tilde{\gamma}|_{\tilde{\sigma}}) &= \sum_{j=1}^N \|\gamma(t_{N-j}) - \gamma(t_{N-j+1})\| \\ &= \sum_{k=1}^N \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| = L(\gamma|_{\sigma}). \end{aligned}$$

La même égalité des supremums en résulte. Dans les deux cas,

$$\boxed{L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)},$$

et l'une des deux courbes est rectifiable si et seulement si l'autre l'est. Le sens de parcours n'a donc aucune influence sur la longueur.

**Exercice 7.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée de classe  $C^1$ . D'après un résultat de cours, la longueur de  $\gamma$  est donnée par la formule

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que cette formule est invariante par changement de paramétrisation de classe  $C^1$ .

## Corrigé

Soit  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  et  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ .

• **Exprimer  $L(\tilde{\gamma})$  en fonction de  $\gamma$ ,  $\varphi$  et  $\varphi'$ .** Par la règle de dérivation des fonctions composées,

$$\tilde{\gamma}'(s) = \gamma'(\varphi(s)) \varphi'(s), \quad \|\tilde{\gamma}'(s)\| = \|\gamma'(\varphi(s))\| |\varphi'(s)|.$$

La formule de longueur donne donc

$$\boxed{L(\tilde{\gamma}) = \int_c^d \|\gamma'(\varphi(s))\| |\varphi'(s)| ds.}$$

• **Montrer que  $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$ .** Si  $\varphi$  est croissant, on a  $\varphi' > 0$ ,  $\varphi(c) = a$  et  $\varphi(d) = b$ . Avec le changement de variable  $t = \varphi(s)$ , donc  $dt = \varphi'(s) ds$ , on trouve

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_c^d \|\gamma'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = L(\gamma).$$

Si  $\varphi$  est décroissant, on a  $\varphi' < 0$ ,  $\varphi(c) = b$  et  $\varphi(d) = a$ . Cette fois,  $|\varphi'(s)| ds = -dt$ , d'où

$$L(\tilde{\gamma}) = - \int_c^d \|\gamma'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds = - \int_b^a \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = L(\gamma).$$

**Exercice 8.** La **cardioïde** est la courbe plane définie en coordonnées polaires par

$$r(\varphi) = 1 + \cos \varphi \quad (\text{ou bien } r(\varphi) = 1 + \sin \varphi, \text{ etc}), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Dessiner la cardioïde et calculer sa longueur.

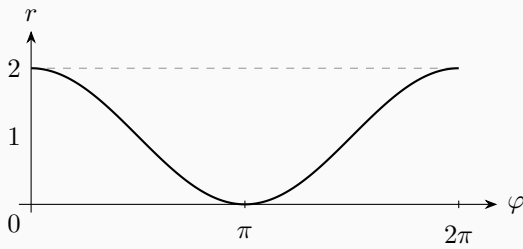
### Corrigé

On choisit  $r(\varphi) = 1 + \cos \varphi$ , de sorte que

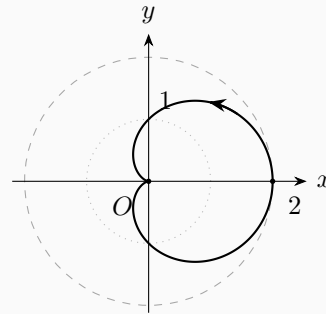
$$\gamma(\varphi) = (1 + \cos \varphi)e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

• **Dessiner la cardioïde.** Le rayon décroît de 2 à 0 lorsque  $\varphi$  varie de 0 à  $\pi$ , puis croît de 0 à 2 entre  $\pi$  et  $2\pi$ . La courbe passe par  $(2, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 0)$  et  $(0, -1)$  pour les valeurs respectives 0,  $\pi/2$ ,  $\pi$  et  $3\pi/2$  du paramètre. On trace d'abord le graphe du rayon, puis la courbe polaire.

Rayon en fonction de l'angle



Support dans le plan



• **Calculer sa longueur.** En identifiant  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$ , on a

$$\gamma'(\varphi) = r'(\varphi)e^{i\varphi} + ir(\varphi)e^{i\varphi} = (r'(\varphi) + ir(\varphi))e^{i\varphi}.$$

Comme  $|e^{i\varphi}| = 1$ , la norme euclidienne est

$$\|\gamma'(\varphi)\| = |r'(\varphi) + ir(\varphi)| = \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}.$$

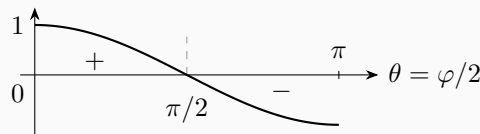
Dans le cas présent,

$$\begin{aligned} \|\gamma'(\varphi)\|^2 &= (-\sin \varphi)^2 + (1 + \cos \varphi)^2 \\ &= 1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 2(1 + \cos \varphi). \end{aligned}$$

L'identité  $1 + \cos \varphi = 2\cos^2(\varphi/2)$  donne alors

$$\boxed{\|\gamma'(\varphi)\| = 2|\cos(\varphi/2)|.}$$

La valeur absolue est nécessaire :  $\varphi/2$  varie dans  $[0, \pi]$ , et le cosinus change de signe en  $\pi/2$ .



Avec le changement de variable  $\theta = \varphi/2$ , on obtient

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} 2|\cos(\varphi/2)| d\varphi = 4 \int_0^\pi |\cos \theta| d\theta \\ &= 8 \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 8 [\sin \theta]_0^{\pi/2} = \boxed{8}. \end{aligned}$$

**Exercice 9.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$  une courbe plane régulière paramétrée par le paramètre  $t$  qui n'est pas l'abscisse curviligne  $s$ . En utilisant la reparamétrisation  $t = t(s)$ , montrer que la courbure de  $\gamma$  vaut

$$k(t) = \frac{\sqrt{\|\gamma'(t)\|^2 \cdot \|\gamma''(t)\|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2}}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

N.B. Si  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe de l'espace, on a aussi  $k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$ .

### Corrigé

• **Exprimer la courbure à l'aide d'un paramètre quelconque.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe régulière de classe  $C^2$ . Comme  $\|\gamma'(t)\| > 0$ , on peut utiliser l'abscisse curviligne

$$s = s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du.$$

On choisit ici le sens croissant ; le choix de la constante  $s_0$  n'intervient pas dans le calcul. Notons  $t = t(s)$  la fonction réciproque et posons

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)).$$

La courbe  $\tilde{\gamma}$  est paramétrée par longueur d'arc. Ainsi, au point correspondant à  $s = s(t)$ ,

$$k_\gamma(t) = k_{\tilde{\gamma}}(s) = \|\tilde{\gamma}''(s)\|.$$

• **Calcul de la première dérivée.** Puisque  $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ , on a

$$t'(s) = \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}, \quad \tilde{\gamma}'(s) = \frac{\gamma'(t(s))}{\|\gamma'(t(s))\|}.$$

Pour alléger les expressions, on écrit désormais  $t = t(s)$  et l'on pose

$$v = \|\gamma'(t)\|, \quad q = \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle.$$

Les grandeurs dépendant de  $t$  dans les calculs suivants sont toutes évaluées en  $t(s)$ .

• **Calcul de la seconde dérivée.** D'une part,

$$\frac{d}{ds} \|\gamma'(t(s))\| = \frac{\langle \gamma''(t) t'(s), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{q}{v^2}.$$

D'autre part, la règle de dérivation d'un quotient donne

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}''(s) &= \frac{\gamma''(t) t'(s) v - \gamma'(t) \frac{dv}{ds}}{v^2} \\ &= \frac{\gamma''(t) - \gamma'(t) q/v^2}{v^2} = \frac{v^2 \gamma''(t) - q \gamma'(t)}{v^4}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} k_\gamma(t)^2 &= \|\tilde{\gamma}''(s)\|^2 \\ &= \frac{v^4 \|\gamma''(t)\|^2 - 2v^2 q \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle + q^2 \|\gamma'(t)\|^2}{v^8} \\ &= \frac{v^4 \|\gamma''(t)\|^2 - 2v^2 q^2 + v^2 q^2}{v^8} = \frac{v^2 \|\gamma''(t)\|^2 - q^2}{v^6}. \end{aligned}$$

En prenant la racine carrée, il vient

$$k(t) = \frac{\sqrt{\|\gamma'(t)\|^2 \|\gamma''(t)\|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2}}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

• **Retrouver la formule en coordonnées dans le plan.** Pour  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , on utilise l'identité

$$\begin{aligned} (x'^2 + y'^2)(x''^2 + y''^2) - (x'x'' + y'y'')^2 \\ = x'^2 y''^2 + y'^2 x''^2 - 2x'y'x''y'' = (x'y'' - y'x'')^2. \end{aligned}$$

## Corrigé (suite)

Ainsi,

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

- **Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ .** Le calcul en norme et produit scalaire est identique. L'identité

$$\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$$

pour le produit vectoriel donne alors

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

**Exercice 10.** Quelles sont les courbes planes régulières à courbure constante ?

## Corrigé

- **Quelles sont les courbes planes régulières à courbure constante ?** Soit  $\gamma$  une courbe plane régulière de classe  $C^2$ . Après reparamétrisation, on peut supposer qu'elle est paramétrée par l'abscisse curviligne  $s$ . On a alors

$$\|\gamma'(s)\| = 1, \quad k(s) = \|\gamma''(s)\|.$$

Écrivons  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  et supposons  $k(s) = c$ , avec  $c \geq 0$ . Les deux conditions deviennent

$$\begin{cases} x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1, \\ x''(s)^2 + y''(s)^2 = c^2. \end{cases}$$

- **Cas  $c = 0$ .** La seconde égalité implique  $x'' = y'' = 0$ , donc

$$x(s) = a_1s + b_1, \quad y(s) = a_2s + b_2.$$

En éliminant  $s$ , on obtient

$$a_2x - a_1y = a_2b_1 - a_1b_2.$$

La première égalité donne  $a_1^2 + a_2^2 = 1$  : le vecteur  $(a_1, a_2)$  est non nul. La courbe décrit donc une portion de droite.

- **Cas  $c > 0$  : intégration locale.** Considérons un intervalle de  $s$  sur lequel  $y' \neq 0$ . Le signe  $\varepsilon = \text{sgn}(y') \in \{-1, 1\}$  y est constant, et

$$y' = \varepsilon \sqrt{1 - x'^2}, \quad y'' = -\varepsilon \frac{x'x''}{\sqrt{1 - x'^2}}.$$

On en déduit

$$c^2 = x''^2 + y''^2 = x''^2 + \frac{x'^2 x''^2}{1 - x'^2} = \frac{x''^2}{1 - x'^2}.$$

Comme  $1 - x'^2 > 0$ , le quotient suivant est continu et ne s'annule pas. Son signe  $\eta \in \{-1, 1\}$  est donc constant :

$$\frac{x''(s)}{\sqrt{1 - x'(s)^2}} = \eta c.$$

En choisissant  $s_*$  dans cet intervalle et en intégrant, on obtient

$$\int_{s_*}^s \frac{x''(u)}{\sqrt{1 - x'(u)^2}} du = \eta c(s - s_*),$$

c'est-à-dire

$$\arcsin(x'(s)) - \arcsin(x'(s_*)) = \eta c(s - s_*).$$

Posons

$$\theta_* = \arcsin(x'(s_*)), \quad \theta(s) = \eta c(s - s_*) + \theta_*.$$

## Corrigé (suite)

Sur l'intervalle considéré,  $\theta(s) = \arcsin(x'(s))$  appartient à  $] -\pi/2, \pi/2[$ . Ainsi  $\cos \theta(s) > 0$  et

$$x'(s) = \sin \theta(s), \quad y'(s) = \varepsilon \cos \theta(s).$$

Une nouvelle intégration donne

$$\begin{cases} x(s) = A - \frac{\eta}{c} \cos \theta(s), \\ y(s) = B + \frac{\varepsilon \eta}{c} \sin \theta(s), \end{cases}$$

où les constantes sont

$$A = x(s_*) + \frac{\eta}{c} \cos \theta_*, \quad B = y(s_*) - \frac{\varepsilon \eta}{c} \sin \theta_*.$$

Par conséquent,

$$(x(s) - A)^2 + (y(s) - B)^2 = \frac{1}{c^2}.$$

La courbe décrit localement un arc de cercle de centre  $(A, B)$  et de rayon  $\rho = 1/c$ .

• **Un même cercle sur tout l'intervalle.** Pour couvrir également les points où  $y' = 0$ , notons  $R(u, v) = (-v, u)$  la rotation d'angle  $\pi/2$ . Comme  $\gamma$  est paramétrée par longueur d'arc, on a  $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$ . Il existe donc une fonction continue  $s \mapsto \kappa(s)$  telle que  $\gamma'' = \kappa R\gamma'$  et  $|\kappa| = c$ . Sur chaque intervalle de  $s$ , la continuité impose  $\kappa \equiv c$  ou  $\kappa \equiv -c$ . Le point

$$C(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa} R\gamma'(s)$$

est alors constant, car

$$C'(s) = \gamma'(s) + \frac{1}{\kappa} R\gamma''(s) = \gamma'(s) + J^2 \gamma'(s) = 0.$$

De plus,  $\|\gamma(s) - C\| = 1/c$ . Le support tout entier est donc contenu dans un même cercle, et ce centre coïncide avec  $(A, B)$  sur chaque intervalle où le calcul précédent s'applique.

• **Conclusion.** Les courbes planes régulières à courbure constante sont, à reparamétrisation près, les portions de droites si  $c = 0$  et les arcs de cercles de rayon  $1/c$  si  $c > 0$ . Réciproquement, une droite paramétrée à vitesse unité a une accélération nulle, et un cercle de rayon  $\rho$ , paramétré par longueur d'arc, vérifie  $\|\gamma''\| = 1/\rho$ .

## Exercice 11.

- Calculer le paramètre par longueur d'arc et la courbure d'une courbe polaire.
- Calculer la courbure des courbes polaires définies par  $r = \frac{p}{1-e \cos \varphi}$ , où  $p, e > 0$ , selon les cas  $e < 1$ ,  $e = 1$  et  $e > 1$ .

## Corrigé

a) **Longueur d'arc et courbure d'une courbe polaire.** Soit  $\gamma(\varphi) = r(\varphi)e^{i\varphi}$ .

• **Calculer le paramètre par longueur d'arc.** On sait que

$$\gamma'(\varphi) = r'(\varphi)e^{i\varphi} + r(\varphi)e^{i(\varphi+\pi/2)}, \quad \|\gamma'(\varphi)\| = \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}.$$

Ainsi, sur un intervalle où la courbe est régulière,

$$s(\varphi) = s_0 \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r'(u)^2 + r(u)^2} du.$$

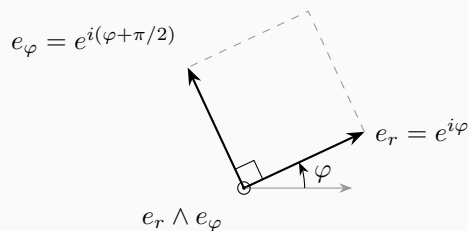
Le signe correspond au choix du sens de l'abscisse curviligne.

• **Calculer la courbure.** On suppose maintenant  $r$  de classe  $C^2$ . Posons

$$e_r = e^{i\varphi}, \quad e_\varphi = e^{i(\varphi+\pi/2)}.$$

Ces deux vecteurs forment une base orthonormée directe du plan. Leurs dérivées par rapport à  $\varphi$  vérifient  $e'_r = e_\varphi$  et  $e'_\varphi = -e_r$ . On obtient donc

$$\begin{aligned}\gamma' &= r'e_r + re_\varphi, \\ \gamma'' &= r''e_r + r'e_\varphi + r'e_\varphi - re_r = (r'' - r)e_r + 2r'e_\varphi.\end{aligned}$$



En regardant le plan comme le plan horizontal de  $\mathbb{R}^3$ , on peut utiliser le produit vectoriel. Comme

$$e_r \wedge e_r = e_\varphi \wedge e_\varphi = 0, \quad e_\varphi \wedge e_r = -e_r \wedge e_\varphi, \quad \|e_r \wedge e_\varphi\| = 1,$$

on a

$$\begin{aligned}\gamma' \wedge \gamma'' &= (r'e_r + re_\varphi) \wedge ((r'' - r)e_r + 2r'e_\varphi) \\ &= 2r'^2 e_r \wedge e_\varphi + r(r'' - r) e_\varphi \wedge e_r \\ &= (2r'^2 - r(r'' - r)) e_r \wedge e_\varphi.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\|\gamma' \wedge \gamma''\| = |2r'^2 + r^2 - rr''|.$$

D'après la formule de l'exercice 9,

$$k(\varphi) = \frac{|2r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2 - r(\varphi)r''(\varphi)|}{(r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2)^{3/2}}.$$

b) **Courbure des coniques en coordonnées polaires.**

- **Calculer la courbure de  $r(\varphi) = p/(1 - e \cos \varphi)$ .** On pose

$$q(\varphi) = 1 - e \cos \varphi, \quad Q(\varphi) = 1 + e^2 - 2e \cos \varphi = q(\varphi)^2 + e^1 \sin^2 \varphi.$$

Puisque le rayon est positif, on travaille sur un intervalle de  $\varphi$  où  $q > 0$ . Les deux premières dérivées de  $r = p/q$  sont

$$r' = -\frac{pe \sin \varphi}{q^2}, \quad r'' = -\frac{pe \cos \varphi}{q^2} + \frac{2pe^2 \sin^2 \varphi}{q^3}.$$

D'une part,

$$r^2 + r'^2 = \frac{p^2(q^2 + e^2 \sin^2 \varphi)}{q^4} = \frac{p^2 Q}{q^4}.$$

D'autre part, les termes contenant  $\sin^2 \varphi$  se simplifient :

$$\begin{aligned}r^2 + 2r'^2 - rr'' &= \frac{p^2}{q^2} + \frac{2p^2 e^2 \sin^2 \varphi}{q^4} + \frac{p^2 e \cos \varphi}{q^3} - \frac{2p^2 e^2 \sin^2 \varphi}{q^4} \\ &= \frac{p^2(q + e \cos \varphi)}{q^3} = \frac{p^2}{q^3} > 0.\end{aligned}$$

La formule de la question a) donne donc

$$k(\varphi) = \frac{(1 - e \cos \varphi)^3}{p(1 + e^2 - 2e \cos \varphi)^{3/2}}, \quad 1 - e \cos \varphi > 0.$$

## Corrigé (suite)

Le rayon de courbure est ainsi

$$\rho(\varphi) = \frac{p(1 + e^2 - 2e \cos \varphi)^{3/2}}{(1 - e \cos \varphi)^3}.$$

• **Distinguer les trois types de coniques.** Si  $0 < e < 1$ , on a  $q > 0$  pour tout  $\varphi$  : la formule s'applique à l'ellipse entière. En particulier,

$$k(0) = k(\pi) = \frac{1}{p}.$$

Aux extrémités du petit axe, caractérisées par  $\cos \varphi = e$ , on trouve

$$k(\varphi) = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{p}.$$

Si  $e = 1$ , on peut prendre  $0 < \varphi < 2\pi$ . Comme  $1 - \cos \varphi = 2 \sin^2(\varphi/2)$ , la courbure de la parabole se simplifie en

$$k(\varphi) = \frac{\sin^3(\varphi/2)}{p}, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Elle vaut  $1/p$  au sommet, pour  $\varphi = \pi$ , et tend vers 0 lorsque  $\varphi$  tend vers 0 ou  $2\pi$ , c'est-à-dire à l'infini sur la parabole.

Si  $e > 1$ , on pose  $\alpha = \arccos(1/e)$  et l'on choisit

$$\alpha < \varphi < 2\pi - \alpha.$$

Cet intervalle décrit la branche de l'hyperbole pour laquelle  $r > 0$ . La formule générale y est valable ; elle donne  $k(\pi) = 1/p$  au sommet et  $k(\varphi) \rightarrow 0$  aux deux extrémités de l'intervalle.

Si l'on autorise un rayon *signé*, le même calcul reste valable pour  $q \neq 0$ , avec

$$k(\varphi) = \frac{|1 - e \cos \varphi|^3}{p(1 + e^2 - 2e \cos \varphi)^{3/2}}.$$

Cette dernière expression couvre aussi l'autre branche de l'hyperbole.

**Exercice 12.** La **spirale logarithmique** est la courbe  $\gamma(t) = (e^{at} \cos t, e^{at} \sin t) = e^{(a+i)t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , où  $a \neq 0$ .

- Dessiner la spirale logarithmique.
- Calculer l'abscisse curviligne et la courbure de la spirale logarithmique.
- Montrer que, pour  $a > 0$ , on a  $\gamma(t) \rightarrow (0, 0)$  quand  $t \rightarrow -\infty$ . Montrer que la longueur d'arc entre 0 et  $t$  a une limite finie quand  $t \rightarrow -\infty$ .
- Quelles sont les courbes planes régulières dont le rayon de courbure est proportionnel à l'arc ?
- Montrer que la tangente à la spirale logarithmique fait un angle constant avec la droite joignant le point courant à l'origine. Quelles sont les courbes planes ayant cette propriété ?

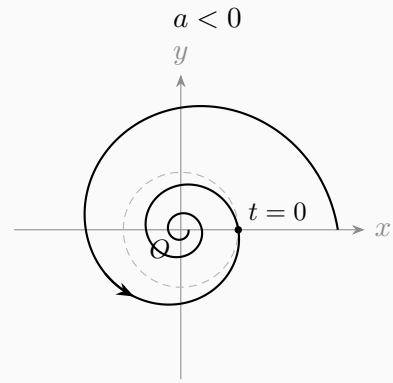
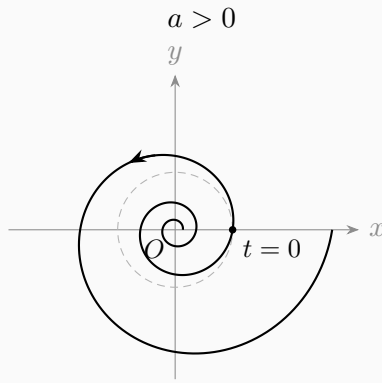
## Corrigé

On identifie  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$  et l'on pose  $h = \sqrt{1 + a^2}$ .

a) **Dessiner la spirale logarithmique.** On a

$$\gamma(t) = e^{at} e^{it}, \quad |\gamma(t)| = e^{at}, \quad \gamma(0) = 1.$$

Ici, le paramètre  $t$  représente l'angle polaire. Si  $a > 0$ , le rayon augmente : la spirale s'éloigne de l'origine dans le sens trigonométrique. Si  $a < 0$ , le rayon diminue : elle s'enroule vers l'origine dans ce même sens. Après un tour, le rayon est multiplié par  $e^{2\pi a}$ .



b) • **Calculer l'abscisse curviligne et reparamétriser la courbe.** On dérive dans  $\mathbb{C}$  :

$$\gamma'(t) = (a+i)e^{(a+i)t} = (a+i)e^{at}e^{it},$$

donc  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2+1}e^{at} > 0$ . La courbe est donc régulière. Une abscisse curviligne croissante est

$$s(t) = s_0 + \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}(e^{at} - e^{at_0}).$$

En choisissant la constante additive convenablement, on obtient

$$s(t) = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}e^{at}.$$

Ce choix donne  $s > 0$  si  $a > 0$ , et  $s < 0$  si  $a < 0$ ; dans les deux cas,  $as > 0$  et  $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ . L'inverse est

$$t(s) = \frac{1}{a} \log\left(\frac{as}{\sqrt{a^2+1}}\right).$$

Ainsi, le paramétrage par longueur d'arc s'écrit

$$\tilde{\gamma}(s) = \frac{as}{\sqrt{a^2+1}} \exp\left(\frac{i}{a} \log\left(\frac{as}{\sqrt{a^2+1}}\right)\right), \quad as > 0.$$

• **Calculer la courbure.** En coordonnées cartésiennes,

$$\gamma'(t) = e^{at}(a \cos t - \sin t, a \sin t + \cos t),$$

$$\gamma''(t) = e^{at}((a^2-1) \cos t - 2a \sin t, (a^2-1) \sin t + 2a \cos t).$$

Le déterminant se simplifie en

$$\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) = (a^2+1)e^{2at}.$$

Par conséquent,

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}e^{at}}, \quad k(s) = \frac{1}{as}.$$

On peut vérifier la seconde formule directement :

$$\tilde{\gamma}'(s) = \frac{a+i}{\sqrt{a^2+1}} \exp\left(\frac{i}{a} \log\left(\frac{as}{\sqrt{a^2+1}}\right)\right), \quad \tilde{\gamma}''(s) = \frac{i}{as} \tilde{\gamma}'(s).$$

Comme  $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$ , on retrouve  $\|\tilde{\gamma}''(s)\| = 1/(as)$ .

c) **Montrer la convergence vers l'origine et calculer la longueur limite.** Supposons  $a > 0$ . On a  $|\gamma(t)| = e^{at} \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow -\infty$ , donc  $\gamma(t) \rightarrow (0,0)$ . Pour  $t < 0$ , la longueur de l'arc compris entre les paramètres  $t$  et 0 est

$$L_t^0(\gamma) = \int_t^0 \sqrt{a^2+1} e^{au} du = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} (1 - e^{at}) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}.$$

La courbe effectue donc une infinité de tours autour de l'origine tout en parcourant une longueur finie jusqu'à ce point limite.

d) Quelles courbes ont un rayon de courbure proportionnel à l'arc ?

- Pour la spirale précédente, on a

$$\rho(s) = \frac{1}{k(s)} = as.$$

L'origine de l'abscisse curviligne est ici choisie au point limite vers lequel la spirale s'enroule ; ce point n'appartient pas à la courbe.

• **Réciproquement**, supposons qu'une courbe plane régulière de classe  $C^2$  vérifie  $\rho(s) = cs > 0$ , avec  $c \neq 0$ , après choix de l'origine de  $s$ . Sa courbure vaut  $1/(cs)$ . Sa courbure signée, continue et non nulle, est donc  $\kappa(s) = \varepsilon/(cs)$ , avec un signe constant  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ . Si  $\theta$  est un angle du vecteur tangent unitaire, alors

$$\theta'(s) = \kappa(s), \quad \theta(s) = \theta_0 + \frac{\varepsilon}{c} \log |s|.$$

En posant  $\beta = \varepsilon/c$  et en intégrant  $\gamma'(s) = e^{i\theta(s)}$ , on obtient

$$\gamma(s) = z_0 + \frac{e^{i\theta_0}}{1 + i\beta} s e^{i\beta \log |s|}.$$

Sur l'intervalle considéré,  $s$  garde un signe constant. Le rayon par rapport à  $z_0$  est proportionnel à  $|s|$  et l'angle est affine en  $\log |s|$  : il s'agit d'une **spirale logarithmique**. Ainsi, à déplacement, réflexion et reparamétrisation près, les courbes cherchées sont les arcs de spirales logarithmiques.

e) Montrer que l'angle de la tangente avec la direction radiale est constant.

- Pour la spirale,

$$\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} = e^{it}, \quad T(t) = \frac{a + i}{\sqrt{a^2 + 1}} e^{it}.$$

Le produit scalaire des deux vecteurs unitaires vaut

$$\left\langle \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}, T(t) \right\rangle = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

L'angle est donc constant. Pour l'angle non orienté entre les deux droites, le cosinus vaut  $|a|/\sqrt{a^2 + 1}$ .

• **Déterminer toutes les courbes régulières ayant cette propriété.** On travaille sur un intervalle où la courbe évite l'origine et on la paramètre par longueur d'arc. Écrivons

$$\gamma(s) = r(s)e^{i\varphi(s)}, \quad r(s) = |\gamma(s)| > 0.$$

La constance de l'angle revient, après choix du sens de parcours, à

$$\left\langle \frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}, \gamma'(s) \right\rangle = c, \quad c \in [-1, 1].$$

Or

$$r'(s) = \frac{\langle \gamma(s), \gamma'(s) \rangle}{|\gamma(s)|} = c, \quad r(s) = cs + b.$$

La condition de vitesse unité donne

$$1 = |\gamma'(s)|^2 = c^2 + (cs + b)^2 \varphi'(s)^2.$$

Si  $0 < |c| < 1$ , le signe  $\varepsilon$  de  $\varphi'$  est constant, et

$$\varphi'(s) = \frac{\varepsilon \sqrt{1 - c^2}}{cs + b}, \quad \varphi(s) = \varphi_0 + \frac{\varepsilon \sqrt{1 - c^2}}{c} \log \left( \frac{cs + b}{cs_0 + b} \right).$$

On retrouve les spirales logarithmiques de centre l'origine.

## Corrigé (suite)

Si  $c = 0$ , le rayon est constant :  $r = b > 0$  et  $\varphi'(s) = \varepsilon/b$ . La courbe est un arc de cercle centré à l'origine.

Si  $|c| = 1$ , on a  $\varphi' = 0$  : la courbe est une portion de demi-droite issue de l'origine, sans le point origine.

• **Conclusion.** Les courbes cherchées sont donc les **spirales logarithmiques**, les **cercles centrés à l'origine** et les **portions de demi-droites radiales**.

**Exercice 13.** Une roue roule sans glisser sur une droite dans le plan vertical. La courbe tracée par un point du bord de la roue s'appelle **cycloïde**.

a) Dessiner la cycloïde, montrer qu'elle peut être paramétrée par

$$\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où  $a > 0$  est le rayon de la roue, et déterminer ses points singuliers.

b) Calculer l'abscisse curviligne et la courbure de la cycloïde. Exprimer la courbure en fonction de l'abscisse curviligne. Calculer la longueur de la cycloïde qui correspond à un tour complet de la roue.

c) Quelle est la forme des courbes décrites par des points intérieurs (respectivement, extérieurs) de la roue ?

d) Etudier les points singuliers.

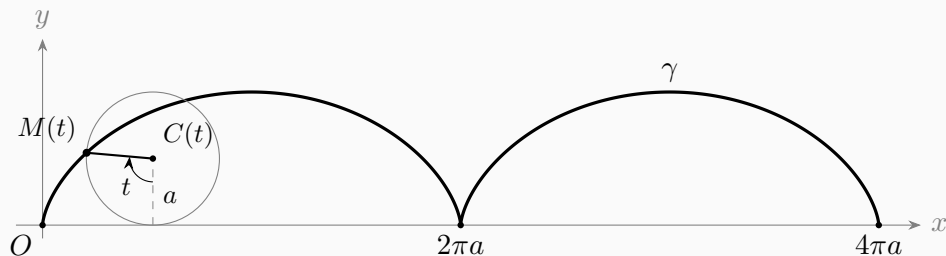
## Corrigé

a) • **Dessiner la cycloïde et déterminer son paramétrage.** On suppose que le point marqué est au point de contact avec le sol pour  $t = 0$ . Lorsque la roue tourne d'un angle  $t$  dans le sens horaire, son centre  $C(t)$  se déplace de la longueur  $at$  vers la droite, puisque la roue roule sans glisser. Ainsi,

$$\overrightarrow{OC(t)} = (at, a), \quad \overrightarrow{C(t)M(t)} = (-a \sin t, -a \cos t).$$

En additionnant ces deux vecteurs, on obtient

$$\boxed{\gamma(t) = \overrightarrow{OM(t)} = a(t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}.}$$



• **Déterminer les points singuliers.** La dérivée est

$$\gamma'(t) = a(1 - \cos t, \sin t).$$

Elle s'annule exactement lorsque  $t = 2k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Les points singuliers sont donc

$$\boxed{\gamma(2k\pi) = (2ka\pi, 0), \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

Les autres points sont réguliers. Chaque intervalle  $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$  décrit une arche de la cycloïde.

b) • **Calculer l'abscisse curviligne.** On a

$$\|\gamma'(t)\| = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right|.$$

Une abscisse curviligne croissante est donc

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t 2a \left| \sin \frac{u}{2} \right| du.$$

Sur la première arche régulière,  $0 < t < 2\pi$ , on peut choisir

$$s(t) = -4a \cos \frac{t}{2}, \quad -4a < s < 4a.$$

L'origine de  $s$  est ainsi placée au sommet de l'arche, pour  $t = \pi$ . On peut inverser cette relation :

$$t(s) = 2 \arccos\left(-\frac{s}{4a}\right), \quad \tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)).$$

Pour mesurer la longueur à partir du point singulier  $t = 0$ , on utilise plutôt  $\ell(t) = s(t) + 4a = 4a(1 - \cos(t/2))$ .

- **Calculer la courbure et l'exprimer en fonction de l'arc.** On a  $\gamma''(t) = a(\sin t, \cos t)$ , d'où  $\det(\gamma', \gamma'') = a^2((1 - \cos t) \cos t - \sin^2 t) = -a^2(1 - \cos t)$ .

Aux points réguliers,

$$k(t) = \frac{a^2(1 - \cos t)}{(2a|\sin(t/2)|)^3} = \frac{1}{4a|\sin(t/2)|}.$$

Sur la première arche,  $\cos(t/2) = -s/(4a)$  et  $\sin(t/2) > 0$ . Par conséquent,

$$k(s) = \frac{1}{\sqrt{16a^2 - s^2}}, \quad -4a < s < 4a.$$

Avec la longueur  $\ell = s + 4a$  mesurée depuis le point de contact, la même formule devient  $k(\ell) = 1/\sqrt{\ell(8a - \ell)}$ , pour  $0 < \ell < 8a$ . La courbure tend vers  $+\infty$  à chaque extrémité de l'arche.

- **Calculer la longueur correspondant à un tour complet.** Un tour correspond à  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Ainsi,

$$L = 2a \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 4a \int_0^\pi \sin u du = \boxed{8a}.$$

- c) **Décrire les courbes associées aux points intérieurs et extérieurs de la roue.** Soit  $b \geq 0$  la distance du point marqué au centre de la roue. On choisit ce point sur la verticale descendante du centre pour  $t = 0$ . Le même calcul donne

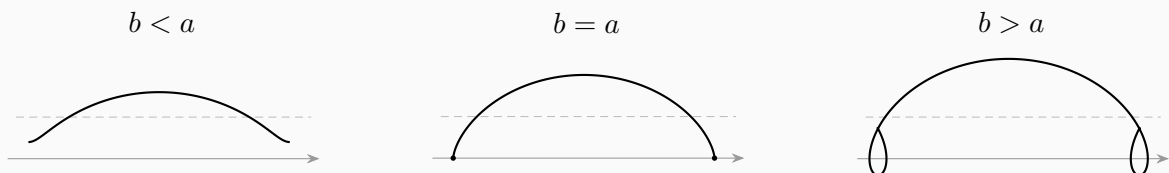
$$\gamma_b(t) = (at - b \sin t, a - b \cos t).$$

Sa vitesse vérifie

$$\|\gamma'_b(t)\|^2 = (a - b \cos t)^2 + b^2 \sin^2 t = a^2 + b^2 - 2ab \cos t.$$

Si  $0 \leq b < a$ , la courbe est régulière et sa coordonnée horizontale est strictement croissante, car  $a - b \cos t > 0$  : elle présente des ondulations, sans point de rebroussement ni boucle. Pour  $b = 0$ , on retrouve la droite parcourue par le centre de la roue.

Si  $b = a$ , on retrouve la cycloïde et ses points de rebroussement. Si  $b > a$ , la courbe reste régulière, puisque sa vitesse est au moins  $b - a > 0$ , mais elle présente des boucles : sa coordonnée horizontale décroît au voisinage de chaque  $t = 2k\pi$ .



- d) **Étudier les points singuliers de la cycloïde.** Par translation, il suffit d'étudier  $t = 0$ . Les développements limités donnent

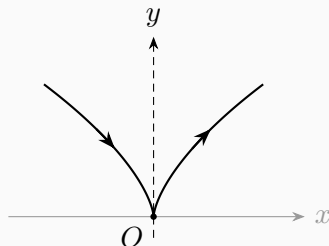
$$\gamma(t) = a \left( \frac{t^3}{6} + O(t^5), \frac{t^2}{2} + O(t^4) \right).$$

## Corrigé (suite)

De plus,

$$\gamma'(0) = 0, \quad \gamma''(0) = (0, a), \quad \gamma'''(0) = (a, 0).$$

Les vecteurs  $\gamma''(0)$  et  $\gamma'''(0)$  sont indépendants : l'origine est un **point de rebroussement de première espèce**, ou point cuspidal, dont la tangente est l'axe vertical. Les deux branches sont situées dans le demi-plan  $y \geq 0$ .



Il en est de même en chaque  $(2ka\pi, 0)$ , avec la tangente  $x = 2ka\pi$ .

**Exercice 14.** Soit  $\gamma$  une courbe birégulière. On suppose que  $\gamma$  est située à l'intérieur (respectivement, à l'extérieur) d'un cercle  $C$  et qu'elle touche le cercle au point  $p : \gamma(t_0) = p \in C$ .

Montrer que le cercle osculateur de  $\gamma$  en  $p$  est situé à l'intérieur (respectivement, à l'extérieur) de  $C$ . [L'intérieur et l'extérieur sont traités dans le sens large.] Quelle conclusion pour le rayon de courbure en  $p$  ?

## Corrigé

On travaille dans le plan, au voisinage d'un point de contact intérieur à l'intervalle de paramétrage. On note  $r > 0$  le rayon de  $C$ . Après translation et reparamétrisation, on peut supposer que le centre de  $C$  est l'origine et que  $\gamma = \gamma(s)$  est paramétrée par longueur d'arc. Posons  $p = \gamma(s_0)$  ; on a  $\|p\| = r$ .

• **Comparer les cercles dans le cas où la courbe est à l'intérieur de  $C$ .** Considérons la fonction

$$f(s) = \|\gamma(s)\|^2.$$

On a  $f(s) \leq r^2$  et  $f(s_0) = r^2$  : la fonction  $f$  possède un maximum local en  $s_0$ . Ainsi,

$$f'(s_0) = 2\langle p, \gamma'(s_0) \rangle = 0, \quad f''(s_0) \leq 0.$$

Le vecteur  $p$  est donc orthogonal à la tangente. D'autre part,  $\|\gamma'\| = 1$  implique  $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$ . Dans le plan, les vecteurs  $p$  et  $\gamma''(s_0)$  sont donc colinéaires : il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\gamma''(s_0) = \lambda p.$$

La birégularité impose  $\lambda \neq 0$ . En dérivant  $f$  une deuxième fois, on obtient

$$f''(s_0) = 2(1 + \langle p, \gamma''(s_0) \rangle) = 2(1 + \lambda r^2) \leq 0.$$

Par conséquent,

$$\lambda \leq -\frac{1}{r^2} < 0, \quad k(s_0) = \|\gamma''(s_0)\| = |\lambda|r \geq \frac{1}{r}, \quad \boxed{\rho(s_0) \leq r}.$$

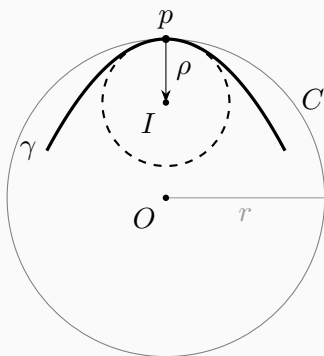
La normale principale pointe vers l'origine :  $N(s_0) = -p/r$ . Le centre  $I$  du cercle osculateur est donc

$$I = p + \rho N(s_0) = \left(1 - \frac{\rho}{r}\right)p, \quad \|I\| = r - \rho.$$

Pour tout point  $q$  de ce cercle,

$$\|q\| \leq \|I\| + \|q - I\| = (r - \rho) + \rho = r.$$

Le cercle osculateur est bien contenu dans le disque fermé bordé par  $C$ .



• **Traiter le cas où la courbe est à l'extérieur de  $C$ .** Cette fois,  $f(s) \geq r^2 = f(s_0)$  :  $f$  possède un minimum local. On obtient encore  $\gamma''(s_0) = \lambda p$ , mais

$$2(1 + \lambda r^2) \geq 0, \quad \lambda \geq -\frac{1}{r^2}, \quad \lambda \neq 0.$$

Deux configurations sont possibles.

**Si  $\lambda < 0$ ,** la normale principale pointe vers le centre de  $C$ . On a alors

$$k(s_0) = -\lambda r \leq \frac{1}{r}, \quad \boxed{\rho \geq r}.$$

Le centre osculateur vaut  $I = (1 - \rho/r)p$ , donc  $\|I\| = \rho - r$ . Pour tout point  $q$  du cercle osculateur,

$$\|q\| \geq \|q - I\| - \|I\| = \rho - (\rho - r) = r.$$

Le cercle osculateur est à l'extérieur de  $C$  ; son disque contient le disque bordé par  $C$ .

**Si  $\lambda > 0$ ,** la normale principale pointe à l'opposé du centre de  $C$ . Cette fois,

$$I = \left(1 + \frac{\rho}{r}\right)p, \quad \|I\| = r + \rho,$$

et, pour tout point  $q$  du cercle osculateur,

$$\|q\| \geq \|I\| - \|q - I\| = (r + \rho) - \rho = r.$$

Le cercle osculateur est encore à l'extérieur de  $C$ , mais il n'y a **aucune inégalité générale entre  $\rho$  et  $r$**  dans cette configuration : deux cercles extérieurement tangents peuvent avoir n'importe quels rayons positifs.

**Exercice 15.** Soit  $\gamma$  une courbe régulière, soit  $\rho$  le rayon de courbure en  $\gamma(t_0) = p$  (on suppose que  $\rho < \infty$ ). Soit  $C_r$  un cercle de rayon  $r$  qui est tangent à  $\gamma$  en  $p$  et situé dans le demi-plan de concavité de  $\gamma$  en  $p$  (le demi-plan indiqué par la normale principale de  $\gamma$  en  $p$ ).

Montrer que pour  $t$  proche de  $t_0$ ,  $\gamma(t)$  est situé à l'intérieur de  $C_r$  si  $r > \rho$ , et à l'extérieur de  $C_r$  si  $r < \rho$ .

### Corrigé

• **Comparer la position de la courbe et celle du cercle tangent de rayon  $r$ .** On paramètre  $\gamma$  par longueur d'arc  $s$ , avec  $p = \gamma(s_0)$ . On note  $T_0 = \gamma'(s_0)$  et  $N_0$  la normale principale en  $p$ . La courbure en ce point est  $1/\rho > 0$ , donc

$$\gamma''(s_0) = \frac{1}{\rho} N_0.$$

Le centre du cercle  $C_r$ , situé dans le demi-plan de concavité, est

$$I_r = p + r N_0.$$

Considérons la différence entre le carré de la distance à ce centre et le carré du rayon :

$$D(s) = \|\gamma(s) - I_r\|^2 - r^2.$$

## Corrigé (suite)

Le signe de  $D(s)$  détermine si  $\gamma(s)$  est à l'intérieur ou à l'extérieur de  $C_r$ . Au point de contact,

$$D(s_0) = 0, \quad D'(s_0) = 2\langle -rN_0, T_0 \rangle = 0.$$

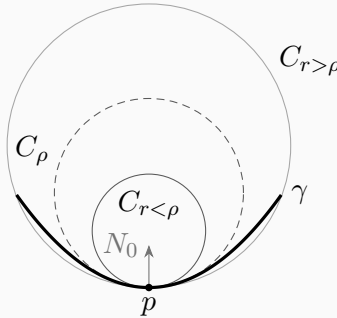
De plus,

$$\begin{aligned} D''(s_0) &= 2\|\gamma'(s_0)\|^2 + 2\langle \gamma(s_0) - I_r, \gamma''(s_0) \rangle \\ &= 2 - \frac{2r}{\rho}. \end{aligned}$$

Le développement limité à l'ordre deux donne

$$D(s) = \left(1 - \frac{r}{\rho}\right)(s - s_0)^2 + o((s - s_0)^2).$$

Si  $r > \rho$ , le coefficient de  $(s - s_0)^2$  est négatif, et donc  $D(s)$  aussi : pour  $s \neq s_0$  suffisamment proche de  $s_0$ , la courbe est strictement à l'intérieur de  $C_r$ . Si  $r < \rho$ , le coefficient de  $(s - s_0)^2$  est positif : la courbe est strictement à l'extérieur de  $C_r$ . Au point  $s = s_0$ , elle est bien sûr sur le cercle.



Lorsque  $r = \rho$ , le terme d'ordre deux s'annule et ne permet pas, à lui seul, de conclure sur la position de la courbe.

• **Retrouver le cercle osculateur comme limite de cercles tangents.** Pour  $s \neq s_0$  proche de  $s_0$ , cherchons le cercle tangent à  $\gamma$  en  $p$  et passant par  $q = \gamma(s)$ . Son centre appartient à la normale en  $p$  ; écrivons-le  $p + R_s N_0$ . L'égalité des distances du centre à  $p$  et à  $q$  donne

$$\|q - p - R_s N_0\|^2 = R_s^2 \iff R_s = \frac{\|q - p\|^2}{2\langle q - p, N_0 \rangle}.$$

En posant  $h = s - s_0$ , le développement de la courbe est

$$q - p = hT_0 + \frac{h^2}{2\rho}N_0 + o(h^2).$$

Ainsi,

$$\|q - p\|^2 = h^2 + o(h^2), \quad 2\langle q - p, N_0 \rangle = \frac{h^2}{\rho} + o(h^2).$$

Le dénominateur est positif pour  $h \neq 0$  assez petit, et

$$R_s \longrightarrow \rho, \quad p + R_s N_0 \longrightarrow p + \rho N_0.$$

Les rayons et les centres de ces cercles convergent donc vers ceux du cercle osculateur.

**Exercice 16** (Partiel 2009). Soit  $\gamma$  une courbe birégulière de  $\mathbb{R}^3$ .

- Montrer que si tous les plans normaux de  $\gamma$  passent par un point fixe, alors  $\gamma$  est située sur une sphère.
- Montrer que si tous les plans osculateurs de  $\gamma$  passent par un point fixe, alors  $\gamma$  est une courbe plane.

## Corrigé

On note  $T = \gamma' / \|\gamma'\|$ ,  $N = T' / \|T'\|$  et  $B = T \wedge N$  les vecteurs tangent, normal principal et binormal. On paramétrise la courbe par longueur d'arc  $s$  et l'on translate le point fixe à l'origine.

- a) **Montrer que la courbe est sphérique si les plans normaux passent par un point fixe.** Le plan normal en  $\gamma(s)$  est

$$\Pi_n(s) = \gamma(s) + \text{Vect}(N(s), B(s)).$$

Comme il contient l'origine, le vecteur  $\gamma(s)$  appartient à  $\text{Vect}(N(s), B(s))$ . Il est donc orthogonal à  $T(s)$ . Par conséquent,

$$\frac{d}{ds} \|\gamma(s)\|^2 = 2\langle \gamma(s), T(s) \rangle = 0.$$

La fonction  $\|\gamma(s)\|^2$  est constante. Cette constante est strictement positive, car la courbe est régulière : le support est donc situé sur une sphère centrée au point fixe.

- b) **Montrer que la courbe est plane si les plans osculateurs passent par un point fixe.** Le plan osculateur est

$$\Pi_{\text{osc}}(s) = \gamma(s) + \text{Vect}(T(s), N(s)).$$

Puisqu'il contient l'origine, il existe des fonctions  $a, b$  telles que

$$\gamma(s) = a(s)T(s) + b(s)N(s).$$

- **Si la courbe est de classe  $C^3$** , on peut utiliser la torsion  $\tau$  et les formules de Frenet :

$$T' = kN, \quad N' = -kT + \tau B, \quad B' = -\tau N.$$

En dérivant l'expression de  $\gamma$ , on trouve

$$\gamma' = (a' - bk)T + (ak + b')N + b\tau B.$$

Comme  $\gamma' = T$ , l'indépendance des trois vecteurs du repère donne

$$\begin{cases} a' - bk = 1, \\ ak + b' = 0, \\ b\tau = 0. \end{cases}$$

La fonction  $b$  ne peut être identiquement nulle sur aucun intervalle ouvert non vide. En effet, on y aurait  $b' = 0$ , puis  $a = 0$  puisque  $k > 0$ , ce qui contredirait la première équation. Ainsi, l'ensemble où  $b \neq 0$  est dense. Sur cet ensemble,  $b\tau = 0$  entraîne  $\tau = 0$  ; par continuité,  $\tau = 0$  partout. Le vecteur  $B$  est donc constant et

$$\langle \gamma(s), B \rangle = 0 \quad \text{pour tout } s.$$

Ainsi, la courbe est contenue dans le plan passant par le point fixe et orthogonal à ce vecteur binormal constant.

- **La seule régularité  $C^2$  suffit aussi.** Voici une preuve qui n'utilise pas la torsion. Posons

$$W(s) = \gamma(s) \wedge \gamma'(s).$$

Lorsque  $W(s) \neq 0$ , les vecteurs  $\gamma(s)$  et  $\gamma'(s)$  engendrent le plan osculateur vectoriel, car ce plan contient l'origine. Ainsi  $\gamma''(s) \in \text{Vect}(\gamma(s), \gamma'(s))$ , et

$$W'(s) = \gamma(s) \wedge \gamma''(s)$$

est proportionnel à  $W(s)$ . La direction de  $W$  est donc constante sur chaque intervalle où  $W \neq 0$ . Le binormal unitaire  $B$ , qui lui est parallèle et qui est continu, y est lui aussi constant.

Il reste à traverser les zéros de  $W$ . Si  $W(s_0) = 0$ , on a  $\gamma(s_0) = aT(s_0)$ . Si  $a \neq 0$ , alors

$$W'(s_0) = aT(s_0) \wedge \gamma''(s_0) \neq 0,$$

donc  $s_0$  est un zéro isolé. Si  $a = 0$ , on a  $\gamma(s_0) = 0$  ; les développements à l'ordre deux donnent

$$W(s_0 + h) = \frac{h^2}{2} T(s_0) \wedge \gamma''(s_0) + o(h^2).$$

La birégularité rend encore le coefficient non nul : ce zéro est lui aussi isolé. Par continuité, les valeurs constantes de  $B$  de part et d'autre de chaque zéro coïncident. Le vecteur  $B$  est donc constant sur tout l'intervalle, et l'on conclut comme précédemment.

**Exercice 17.** On munit  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire euclidien et de la norme associée. Caractériser les isométries de cet espace euclidien comme produit semidirect de groupes  $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ .

### Corrigé

• **Caractériser les isométries de l'espace euclidien.** On munit  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ , de la norme associée  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  et de la distance  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Une *isométrie* est une bijection  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que

$$d(F(x), F(y)) = d(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Montrons que les isométries sont exactement les applications

$$F(x) = Ax + b, \quad A \in O(n), \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^T A = I_n\}.$$

• **Montrer que toute application de cette forme est une isométrie.** Soient  $A \in O(n)$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ . L'application  $F(x) = Ax + b$  est bijective, d'inverse  $y \mapsto A^{-1}(y - b)$ . De plus,

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\|^2 &= \|A(x - y)\|^2 \\ &= \langle A^T A(x - y), x - y \rangle = \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Elle préserve donc la distance.

• **Montrer réciproquement que toute isométrie s'écrit  $F(x) = Ax + b$ .** Soit  $F$  une isométrie. Posons

$$b = F(0), \quad G(x) = F(x) - b.$$

L'application  $G$  est une isométrie qui fixe l'origine. On a donc

$$\|G(x)\| = \|x\|, \quad \|G(x) - G(y)\| = \|x - y\|.$$

L'identité de polarisation

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

montre que  $G$  préserve le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle G(x), G(y) \rangle &= \frac{1}{2} (\|G(x)\|^2 + \|G(y)\|^2 - \|G(x) - G(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Réciproquement, la préservation du produit scalaire implique celle de la distance, puisque

$$\|G(x) - G(y)\|^2 = \|G(x)\|^2 + \|G(y)\|^2 - 2\langle G(x), G(y) \rangle = \|x - y\|^2.$$

La condition de fixation de l'origine est essentielle dans le passage de la distance au produit scalaire : une translation non nulle ne préserve pas le produit scalaire des vecteurs position.

Montrons maintenant que  $G$  est linéaire. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique et posons  $e'_i = G(e_i)$ . Alors

$$\langle e'_i, e'_j \rangle = \langle G(e_i), G(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Les vecteurs  $(e'_1, \dots, e'_n)$  forment donc une base orthonormée. Écrivons les coordonnées de  $G(x)$  dans cette base :

$$G(x) = \sum_{i=1}^n q_i(x) e'_i, \quad q_i(x) = \langle G(x), e'_i \rangle.$$

Pour  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on calcule

$$\begin{aligned} q_i(x + \lambda y) &= \langle G(x + \lambda y), G(e_i) \rangle = \langle x + \lambda y, e_i \rangle \\ &= \langle x, e_i \rangle + \lambda \langle y, e_i \rangle = q_i(x) + \lambda q_i(y). \end{aligned}$$

Chaque  $q_i$  est linéaire ; il en est donc de même pour  $G$ . Si  $A$  désigne sa matrice, la préservation du produit scalaire donne

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \implies A^T A = I_n.$$

Ainsi  $A \in O(n)$  et  $F(x) = G(x) + b = Ax + b$ . Cette écriture est unique :  $b = F(0)$  et  $Ax = F(x) - F(0)$ .

## Corrigé (suite)

• **Identifier le groupe des isométries à un produit semi-direct.** Associons au couple  $(b, A) \in \mathbb{R}^n \times O(n)$  l'isométrie  $F_{b,A} : x \mapsto Ax + b$ . La composition vérifie

$$\begin{aligned}(F_{b',A'} \circ F_{b,A})(x) &= A'(Ax + b) + b' \\ &= (A'A)x + (b' + A'b).\end{aligned}$$

La loi de groupe sur les couples est donc

$$(b', A') \cdot (b, A) = (b' + A'b, A'A).$$

Le neutre est  $(0, I_n)$  et l'inverse de  $(b, A)$  est  $(-A^{-1}b, A^{-1})$ . Cette loi est celle du produit semi-direct pour l'action naturelle de  $O(n)$  sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $b \mapsto Ab$ . On obtient l'isomorphisme de groupes

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n, d) \cong \mathbb{R}^n \rtimes O(n).$$

**Exercice 18. L'hélice circulaire** est la courbe  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, at)$ , où  $a \neq 0$ .

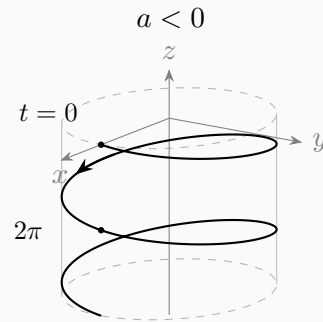
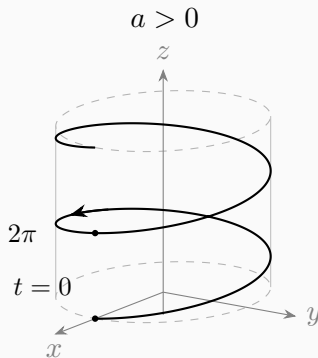
- Déterminer l'abscisse curviligne, la courbure et la torsion.
- Déterminer son plan osculateur.
- Montrer que, pour tout  $t$ , la droite passant par  $\gamma(t)$  et de vecteur directeur  $\vec{n}(t)$  coupe l'axe  $Oz$  sous un angle égal à  $\frac{\pi}{2}$ .
- Montrer que la tangente en tout point fait avec l'axe  $Oz$  un angle constant.

## Corrigé

• **Dessin.** Le support de la courbe

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, at), \quad a \neq 0$$

est contenu dans le cylindre  $x^2 + y^2 = 1$ . La coordonnée verticale augmente avec  $t$  si  $a > 0$ , et diminue si  $a < 0$ . La variation de hauteur pendant un tour est  $2\pi a$ .



- a) • **Déterminer l'abscisse curviligne et la courbure.** On a

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, a), \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + a^2} > 0.$$

En choisissant  $s(0) = 0$ , une abscisse curviligne croissante est

$$s = \sqrt{1 + a^2}t, \quad \tilde{\gamma}(s) = \left( \cos \frac{s}{\sqrt{1 + a^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{1 + a^2}}, \frac{as}{\sqrt{1 + a^2}} \right).$$

La seconde dérivée par rapport à  $s$  vaut

$$\tilde{\gamma}''(s) = -\frac{1}{1 + a^2} \left( \cos \frac{s}{\sqrt{1 + a^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{1 + a^2}}, 0 \right),$$

donc la courbure est constante :

$$k = \frac{1}{1 + a^2}.$$

- **Déterminer le repère de Frenet et la torsion.** En écrivant  $t = s/\sqrt{1+a^2}$ , les vecteurs de Frenet sont

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(-\sin t, \cos t, a),$$

$$N(s) = (-\cos t, -\sin t, 0),$$

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(a \sin t, -a \cos t, 1).$$

On dérive  $B$  par rapport à  $s$  :

$$B'(s) = \frac{a}{1+a^2}(\cos t, \sin t, 0) = -\frac{a}{1+a^2}N(s).$$

Avec la convention de Frenet  $B' = -\tau N$ , on obtient

$$\tau = \frac{a}{1+a^2}.$$

On peut aussi le vérifier à partir du paramètre  $t$  :

$$\gamma' \wedge \gamma'' = (a \sin t, -a \cos t, 1), \quad \det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = a,$$

d'où  $\tau = \det(\gamma', \gamma'', \gamma''') / \|\gamma' \wedge \gamma''\|^2 = a/(1+a^2)$ .

- b) **Déterminer le plan osculateur.** Il passe par  $\gamma(t)$  et est dirigé par  $T(t)$  et  $N(t)$ . Une représentation paramétrique est donc

$$\begin{cases} x = \cos t - \lambda \sin t + \mu \cos t, \\ y = \sin t + \lambda \cos t + \mu \sin t, \\ z = at + a\lambda, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Un vecteur normal est  $(a \sin t, -a \cos t, 1)$ . L'équation cartésienne s'écrit

$$a \sin t (x - \cos t) - a \cos t (y - \sin t) + (z - at) = 0,$$

soit

$$ax \sin t - ay \cos t + z - at = 0.$$

- c) **Montrer que la normale principale rencontre l'axe  $Oz$  à angle droit.** La droite passant par  $\gamma(t)$  et dirigée par  $N(t)$  est

$$P_t(\lambda) = \gamma(t) + \lambda N(t) = ((1-\lambda) \cos t, (1-\lambda) \sin t, at).$$

Pour  $\lambda = 1$ , on a  $P_t(1) = (0, 0, at) \in Oz$ . De plus,  $N(t)$  est orthogonal au vecteur  $(0, 0, 1)$  : cette droite coupe donc l'axe  $Oz$  sous un angle égal à  $\pi/2$ .

- d) **Montrer que la tangente fait un angle constant avec l'axe  $Oz$ .** Le vecteur tangent unitaire satisfait

$$\langle T(t), (0, 0, 1) \rangle = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}},$$

indépendamment de  $t$ . L'angle avec la direction positive de l'axe est donc constant ; son cosinus vaut  $a/\sqrt{1+a^2}$ . Pour l'angle non orienté entre les droites, le cosinus est  $|a|/\sqrt{1+a^2}$ .

**Exercice 19.** On considère une famille de courbes du plan paramétrée par  $t \in \mathbb{R}$  et définie par

$$\mathcal{C}_t := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F_t(x, y) := F(x, y, t) = 0\}.$$

L'enveloppe de la famille  $\{\mathcal{C}_t\}$ , ou **contour apparent**, est l'ensemble  $E$  des points  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels qu'il existe un  $t$  avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0 \\ F(x, y, t) = 0 \end{cases}$$

On suppose ici que pour chaque  $t \in \mathbb{R}$ , la courbe  $\mathcal{C}_t$  admet une paramétrisation régulière  $u \mapsto \alpha_t(u) := \alpha(t, u)$ , avec  $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ .

- a) Montrer que, pour tout  $(t, u) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial \alpha_t}{\partial u}(u)$  est orthogonal à  $\nabla F_t(\alpha_t(u))$ .  
b) Montrer que, pour tout  $(t, u)$ ,  $\alpha_t(u) \in E$  si et seulement si

$$\det \left( \frac{\partial \alpha}{\partial u}(t, u), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, u) \right) = 0.$$

- c) **Enveloppe de cercle ou Fronts.** A partir des résultats précédents, déterminer le "front" ou enveloppe des cercles de rayon 1 centrés sur une parabole d'équation paramétrique  $t \mapsto (t, t^2)$ . Etudier cette enveloppe et donner son interprétation géométrique.  
d) **Caustiques dans une tasse de café.** Un faisceau de rayons lumineux (parallèles) est réfléchi sur une paroi circulaire, quelle est l'enveloppe des droites réfléchies ?

### Corrigé

On écrit  $\alpha(t, u) = \alpha_t(u)$  et l'on note  $\nabla F_t = (\partial_x F_t, \partial_y F_t)$  le gradient dans le plan. L'identité de départ est

$$F(\alpha(t, u), t) = 0.$$

- a) **Montrer que le vecteur tangent à  $\mathcal{C}_t$  est orthogonal au gradient de  $F_t$ .** On dérive l'identité précédente par rapport à  $u$ , en gardant  $t$  fixé. La règle de dérivation des fonctions composées donne

$$0 = \frac{\partial}{\partial u} F(\alpha(t, u), t) = \left\langle \nabla F_t(\alpha(t, u)), \frac{\partial \alpha}{\partial u}(t, u) \right\rangle.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{\partial \alpha}{\partial u}(t, u) \perp \nabla F_t(\alpha(t, u))}.$$

- b) **Exprimer le critère d'enveloppe à l'aide d'un déterminant.** Pour cette équivalence, on suppose que  $F_t$  est une équation régulière de  $\mathcal{C}_t$ , c'est-à-dire que

$$\nabla F_t(\alpha(t, u)) \neq 0.$$

Comme  $\partial_u \alpha \neq 0$ , la question a) montre que  $\partial_u \alpha$  engendre la droite orthogonale à ce gradient. En dérivant cette fois par rapport à  $t$ , on obtient

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} F(\alpha(t, u), t) = \frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(t, u), t) + \left\langle \nabla F_t(\alpha(t, u)), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, u) \right\rangle.$$

Pour le couple  $(t, u)$  considéré, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(\alpha(t, u), t) = 0 &\iff \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, u) \perp \nabla F_t(\alpha(t, u)) \\ &\iff \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, u) \text{ est colinéaire à } \frac{\partial \alpha}{\partial u}(t, u) \\ &\iff \det \left( \frac{\partial \alpha}{\partial u}(t, u), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, u) \right) = 0. \end{aligned}$$

Ce critère caractérise les points de l'enveloppe associés au paramètre  $t$ . En faisant varier les couples  $(t, u)$ , on obtient

$$\boxed{E = \{\alpha(t, u) \mid \det(\partial_u \alpha(t, u), \partial_t \alpha(t, u)) = 0\}}.$$

Il s'agit de l'ensemble des valeurs critiques de l'application  $(t, u) \mapsto \alpha(t, u)$ .

- c) • **Déterminer les fronts des cercles unitaires centrés sur la parabole.** Le cercle de centre  $(t, t^2)$  et de rayon 1 se paramètre par

$$\alpha(t, u) = (t + \cos u, t^2 + \sin u), \quad 0 \leq u < 2\pi.$$

On a

$$\partial_t \alpha = (1, 2t), \quad \partial_u \alpha = (-\sin u, \cos u).$$

Le critère du déterminant donne

$$\cos u + 2t \sin u = 0.$$

En utilisant  $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$  et en posant  $q(t) = \sqrt{1 + 4t^2}$ , on trouve

$$(\cos u, \sin u) = \pm \frac{1}{q(t)}(-2t, 1).$$

L'enveloppe possède donc deux branches paramétrées :

$$\eta_{\pm}(t) = \left( t \mp \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}}, t^2 \pm \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si  $\beta(t) = (t, t^2)$ , sa normale principale unitaire est  $N(t) = (-2t, 1)/q(t)$ , et

$$\eta_{\pm}(t) = \beta(t) \pm N(t).$$

Ces deux fronts s'obtiennent en se déplaçant d'une unité suivant les deux directions normales à la parabole. En un point régulier du front, la tangente est aussi tangente au cercle correspondant.

• **Étudier la régularité et les singularités des fronts.** On calcule

$$N'(t) = -\frac{2}{q(t)^3}(1, 2t), \quad \eta'_{\pm}(t) = \left( 1 \mp \frac{2}{q(t)^3} \right) (1, 2t).$$

La branche  $\eta_-$  est partout régulière. Sa coordonnée horizontale est strictement croissante et sa coordonnée verticale admet son minimum en  $t = 0$ , au point  $(0, -1)$ .

La branche  $\eta_+$  est singulière exactement lorsque  $q(t)^3 = 2$ , c'est-à-dire en

$$t = \pm t_*, \quad t_* = \frac{1}{2} \sqrt{2^{2/3} - 1}.$$

Pour déterminer la nature de ces singularités, posons  $g(t) = 1 - 2/q(t)^3$  et  $v(t) = (1, 2t)$ . Aux paramètres  $t_0 = \pm t_*$ , on a

$$g(t_0) = 0, \quad g'(t_0) = \frac{24t_0}{q(t_0)^5} \neq 0,$$

puis

$$\eta''_+(t_0) = g'(t_0)v(t_0), \quad \eta'''_+(t_0) = g''(t_0)v(t_0) + 2g'(t_0)v'(t_0).$$

Ainsi,

$$\det(\eta''_+(t_0), \eta'''_+(t_0)) = 4g'(t_0)^2 \neq 0.$$

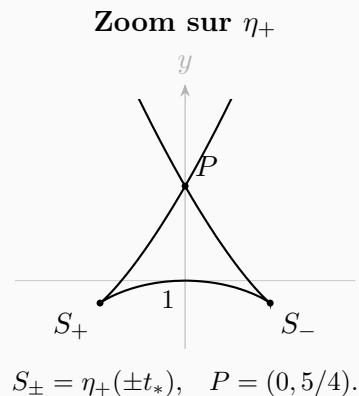
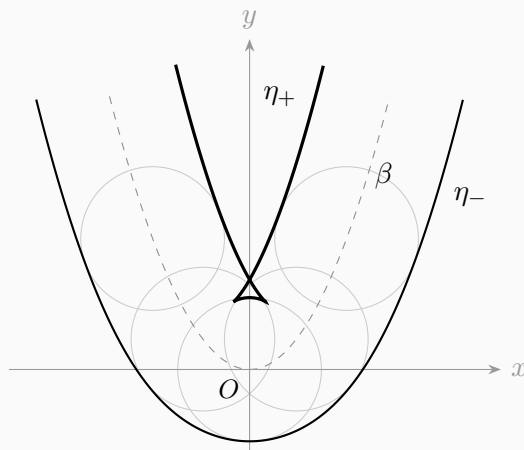
Les deux singularités sont donc des points de rebroussement de première espèce. Elles apparaissent précisément lorsque le rayon de courbure de la parabole vaut 1, puisque

$$k_{\beta}(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}, \quad \rho_{\beta}(t) = \frac{(1 + 4t^2)^{3/2}}{2}.$$

Les deux fronts sont symétriques par rapport à l'axe  $Oy$ . La branche  $\eta_+$  passe par  $(0, 1)$  pour  $t = 0$  et possède aussi un point double transverse :

$$\eta_+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \eta_+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{4}\right).$$

Les directions tangentes correspondantes sont  $(1, \sqrt{3})$  et  $(1, -\sqrt{3})$  ; elles sont distinctes.



• **Donner une interprétation géométrique des fronts.** On peut interpréter ces courbes comme les fronts obtenus, au temps 1, par une propagation à vitesse constante égale à 1 suivant les normales à la parabole. Au temps  $\tau \geq 0$ , ils s'écrivent

$$\eta_{\pm, \tau}(t) = \beta(t) \pm \tau N(t), \quad \eta'_{\pm, \tau}(t) = \left(1 \mp \frac{2\tau}{q(t)^3}\right) (1, 2t).$$

Pour  $0 \leq \tau < 1/2$ , les deux fronts sont réguliers. Le front situé du côté de la concavité devient singulier pour la première fois au temps  $\tau = 1/2$ , au sommet de la parabole ; c'est le minimum de son rayon de courbure. Au temps 1, on retrouve les deux rebroussements et le point double calculés ci-dessus, tandis que le front de l'autre côté reste régulier.

Chaque point du front est à une distance 1 du point de départ correspondant, *suivant sa normale*. Après l'apparition des replis, cela ne signifie pas que sa distance *minimale* à toute la parabole vaut 1 : le front géométrique complet ne se confond pas avec une courbe de niveau de la fonction distance.

• **Complément : cercles centrés sur un cercle et tangents à un diamètre.** Considérons le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ , et le diamètre  $AB$  avec  $A = (-R, 0)$  et  $B = (R, 0)$ . Pour  $0 < t < \pi$ , le cercle de centre  $M_t = R(\cos t, \sin t)$  tangent à l'axe  $Ox$  a pour rayon  $R_t = R \sin t$ . Il se paramètre par

$$\alpha(t, u) = R(\cos t + \sin t \cos u, \sin t(1 + \sin u)).$$

On calcule

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha &= R(-\sin t + \cos t \cos u, \cos t(1 + \sin u)), \\ \partial_u \alpha &= R(-\sin t \sin u, \sin t \cos u). \end{aligned}$$

Le déterminant vaut, à un signe près selon l'ordre des colonnes,

$$R^2 \sin t (\cos t - \sin(t - u)).$$

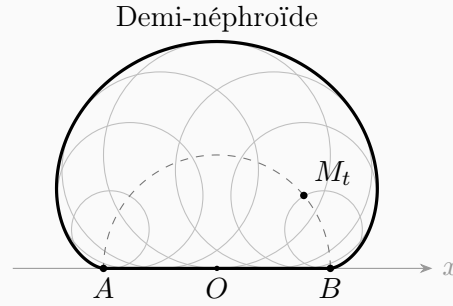
Comme  $\sin t > 0$ , il s'annule exactement pour

$$u = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad u = 2t - \frac{\pi}{2} \quad (\text{mod } 2\pi).$$

Le premier choix donne  $\alpha(t, -\pi/2) = (R \cos t, 0)$  : on retrouve le diamètre, sans ses extrémités pour  $0 < t < \pi$ . Le second donne

$$\begin{aligned} x(t) &= R(\cos t + \sin t \sin(2t)) = \frac{R}{2}(3 \cos t - \cos(3t)), \\ y(t) &= R \sin t(1 - \cos(2t)) = \frac{R}{2}(3 \sin t - \sin(3t)). \end{aligned}$$

C'est la moitié supérieure d'une néphroïde, homothétique à celle de l'exercice 2. Les points  $A, B$  sont obtenus par passage à la limite ; les cercles de la famille  $y$  ont un rayon nul, et ne sont plus réguliers.



- d) • **Déterminer la caustique d'une paroi circulaire.** On choisit une paroi de rayon 1, paramétrée par

$$M(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

et des rayons incidents de direction  $v = (0, 1)$ . La normale unitaire à la paroi est  $n(t) = M(t)$ . La direction réfléchie est obtenue en changeant le signe de la composante normale :

$$\begin{aligned} d(t) &= v - 2\langle v, n(t) \rangle n(t) \\ &= (0, 1) - 2 \sin t (\cos t, \sin t) = (-\sin(2t), \cos(2t)). \end{aligned}$$

La droite réfléchie se paramètre donc par

$$\alpha(t, u) = M(t) + u d(t) = (\cos t - u \sin(2t), \sin t + u \cos(2t)).$$

On dérive :

$$\partial_t \alpha = (-\sin t - 2u \cos(2t), \cos t - 2u \sin(2t)), \quad \partial_u \alpha = (-\sin(2t), \cos(2t)).$$

Le critère d'enveloppe est

$$\det(\partial_t \alpha, \partial_u \alpha) = \sin t - 2u = 0, \quad \text{soit} \quad u = \frac{\sin t}{2}.$$

Comme ce paramètre est positif pour  $0 < t < \pi$ , le point de contact appartient bien au rayon réfléchi, et pas seulement à la droite qui le porte. En remplaçant  $u$ , on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t - \frac{\sin t}{2} \sin(2t) = \cos^3 t, \\ y(t) &= \sin t + \frac{\sin t}{2} \cos(2t) = \frac{3}{2} \sin t - \sin^3 t. \end{aligned}$$

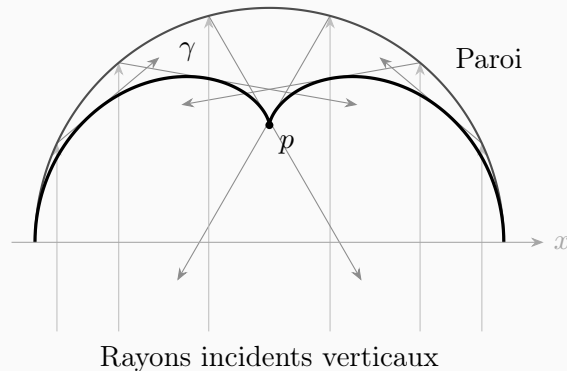
Ainsi,

$$\gamma(t) = \frac{1}{4} (3 \cos t + \cos(3t), 3 \sin t + \sin(3t)), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

À rotation et homothétie près, c'est un arc de néphroïde. Le paramètre  $t = \pi/2$  correspond à son point cuspidal  $(0, 1/2)$ . Le voisinage de ce point s'écrit, pour  $h = t - \pi/2$ ,

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \left(-h^3 + O(h^5), \frac{1}{2} + \frac{3}{4}h^2 + O(h^4)\right).$$

Pour une paroi de rayon  $R$ , il suffit de multiplier ce paramétrage par  $R$ .



**Exercice 20.** Soit  $\gamma$  une courbe plane birégulière. La **développée** de  $\gamma$  est le lieu des centres de courbure.

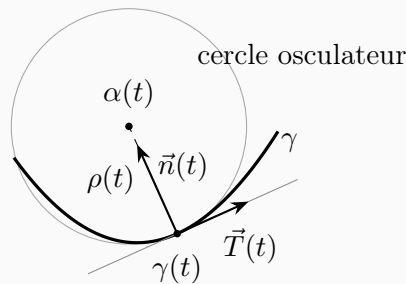
- Ecrire la représentation paramétrique  $\alpha(t) = \dots$  de la développée.
- Montrer que la développée est régulière si la dérivée de la courbure de  $\gamma$  ne s'annule pas.
- Montrer que la tangente à  $\alpha$  en  $\alpha(t)$  est la normale à  $\gamma$  en  $\gamma(t)$ . [La développée est l'enveloppe des droites normales de  $\gamma$ .]
- Montrer que si  $\gamma$  est de classe  $C^3$  et  $\rho' \neq 0$  entre  $t$  et  $t'$ , la longueur d'arc de la développée entre  $t$  et  $t'$  est égale à  $|\rho(t) - \rho(t')|$ .
- Montrer que quand  $t'$  tend vers  $t$ , le point d'intersection de la normale à  $\gamma$  en  $\gamma(t)$  avec la normale à  $\gamma$  en  $\gamma(t')$  tend vers  $\alpha(t)$ .
- Déterminer la développée de la spirale logarithmique.
- Dessiner la développée de l'ellipse. Que se passe-t-il aux sommets de l'ellipse ?
- Montrer que la développée d'un cycloïde est un cycloïde.

### Corrigé

On note  $\vec{T}$  et  $\vec{n}$  les vecteurs tangent unitaire et normal principal de  $\gamma$ ,  $k > 0$  sa courbure et  $\rho = 1/k$  son rayon de courbure. Pour les questions faisant intervenir les dérivées de  $k$  ou de  $\rho$ , on suppose  $\gamma$  de classe  $C^3$ .

- a) **Écrire la représentation paramétrique de la développée.** Le centre du cercle osculateur en  $\gamma(t)$  est situé sur la normale principale, à une distance  $\rho(t)$  du point de contact. Ainsi,

$$\alpha(t) = \gamma(t) + \rho(t)\vec{n}(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)}\vec{n}(t).$$



- b) **Montrer que la développée est régulière si  $k'$  ne s'annule pas.** Commençons par utiliser l'abscisse curviligne  $s$  de  $\gamma$ . Les formules de Frenet dans le plan sont

$$\frac{d\gamma}{ds} = \vec{T}, \quad \frac{d\vec{T}}{ds} = k\vec{n}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -k\vec{T}.$$

Puisque  $\rho k = 1$ , on obtient

$$\frac{d\alpha}{ds} = \vec{T} + \frac{d\rho}{ds}\vec{n} - \rho k\vec{T} = \frac{d\rho}{ds}\vec{n}.$$

Pour un paramètre quelconque  $t$ , la règle de dérivation composée donne également

$$\vec{n}'(t) = -k(t)\gamma'(t), \quad \alpha'(t) = \rho'(t)\vec{n}(t) = -\frac{k'(t)}{k(t)^2}\vec{n}(t).$$

Comme  $\vec{n}(t)$  est unitaire, on en déduit

$$\alpha'(t) = 0 \iff \rho'(t) = 0 \iff k'(t) = 0.$$

La développée est donc régulière là où la dérivée de la courbure ne s'annule pas.

- c) **Identifier la tangente à la développée.** Sur un arc régulier,  $\alpha'(t)$  est un multiple non nul de  $\vec{n}(t)$  : la développée est l'enveloppe des normales à  $\gamma$ , puisque sa tangente est la droite

$$\alpha(t) + \mathbb{R}\vec{n}(t) = \gamma(t) + \mathbb{R}\vec{n}(t).$$

- d) **Calculer la longueur d'un arc de développée.** Supposons  $t < t'$  et  $\rho'$  continue et non nulle entre ces deux paramètres. Elle garde alors un signe constant. Par conséquent,

$$L_t^{t'}(\alpha) = \int_t^{t'} \|\alpha'(u)\| du = \int_t^{t'} |\rho'(u)| du = \left| \int_t^{t'} \rho'(u) du \right| = |\rho(t') - \rho(t)|.$$

L'hypothèse de signe constant est essentielle pour remplacer l'intégrale de la valeur absolue par la valeur absolue de l'intégrale.

- e) **Déterminer la limite du point d'intersection de deux normales voisines.** On travaille en abscisse curviligne et l'on fixe  $s$ . Les normales aux paramètres  $s$  et  $s+h$  sont

$$D_s = \gamma(s) + \mathbb{R}\vec{n}(s), \quad D_{s+h} = \gamma(s+h) + \mathbb{R}\vec{n}(s+h).$$

Écrivons leur point d'intersection, lorsqu'il existe,

$$P_h = \gamma(s) + \lambda_h \vec{n}(s).$$

L'appartenance à  $D_{s+h}$  équivaut à

$$\langle P_h - \gamma(s+h), \vec{T}(s+h) \rangle = 0.$$

On en déduit

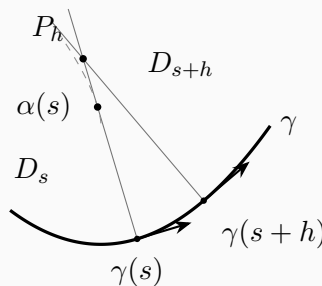
$$\lambda_h = \frac{\langle \gamma(s+h) - \gamma(s), \vec{T}(s+h) \rangle}{\langle \vec{n}(s), \vec{T}(s+h) \rangle}.$$

Les développements limités

$$\gamma(s+h) = \gamma(s) + h\vec{T}(s) + o(h), \quad \vec{T}(s+h) = \vec{T}(s) + hk(s)\vec{n}(s) + o(h)$$

donnent respectivement un numérateur égal à  $h + o(h)$  et un dénominateur égal à  $hk(s) + o(h)$ . Puisque  $k(s) > 0$ , le dénominateur est non nul pour  $h \neq 0$  assez petit : les deux normales se coupent alors en un point unique. Enfin,

$$\lambda_h \longrightarrow \frac{1}{k(s)} = \rho(s), \quad \boxed{P_h \longrightarrow \gamma(s) + \rho(s)\vec{n}(s) = \alpha(s).}$$



- f) **Déterminer la développée de la spirale logarithmique.** Considérons

$$\gamma(t) = e^{at}(\cos t, \sin t), \quad a \neq 0.$$

On a

$$\gamma'(t) = e^{at}(a \cos t - \sin t, a \sin t + \cos t), \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+a^2} e^{at}.$$

Sa courbure et son rayon de courbure sont

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2} e^{at}}, \quad \rho(t) = \sqrt{1+a^2} e^{at}.$$

Le déterminant  $\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) = (1+a^2)e^{2at}$  étant positif, la normale principale s'obtient en tournant le vecteur tangent unitaire de  $\pi/2$  :

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(-a \sin t - \cos t, a \cos t - \sin t).$$

D'où

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= e^{at}(\cos t, \sin t) + e^{at}(-a \sin t - \cos t, a \cos t - \sin t) \\ &= \boxed{ae^{at}(-\sin t, \cos t)}.\end{aligned}$$

En notation complexe,  $\gamma(t) = e^{(a+i)t}$  et

$$\gamma'(t) = (a+i)e^{(a+i)t}, \quad \vec{n}(t) = \frac{ai-1}{\sqrt{1+a^2}}e^{it}, \quad \boxed{\alpha(t) = ia e^{(a+i)t} = ia \gamma(t)}.$$

La développée est donc encore une spirale logarithmique : elle est l'image de  $\gamma$  par une homothétie de rapport  $|a|$  suivie d'une rotation de  $\pi/2$  si  $a > 0$ , ou de  $-\pi/2$  si  $a < 0$ .

g) **Dessiner la développée de l'ellipse et étudier ses sommets.** On paramètre l'ellipse par

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad a, b > 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Posons  $q(t) = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$ . Alors

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-a \sin t, b \cos t), & \gamma''(t) &= (-a \cos t, -b \sin t), \\ \|\gamma'(t)\| &= q(t), & \det(\gamma'(t), \gamma''(t)) &= ab.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$k(t) = \frac{ab}{q(t)^3}, \quad \rho(t) = \frac{q(t)^3}{ab}, \quad \vec{n}(t) = \frac{(-b \cos t, -a \sin t)}{q(t)}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (a \cos t, b \sin t) + \frac{q(t)^2}{ab}(-b \cos t, -a \sin t) \\ &= \left( \frac{a^2 - q(t)^2}{a} \cos t, \frac{b^2 - q(t)^2}{b} \sin t \right) \\ &= \boxed{\left( \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \right)}.\end{aligned}$$

Pour  $a \neq b$ , sa dérivée est

$$\alpha'(t) = \left( -3 \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^2 t \sin t, 3 \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^2 t \cos t \right).$$

Elle s'annule exactement lorsque  $\sin t \cos t = 0$ , soit

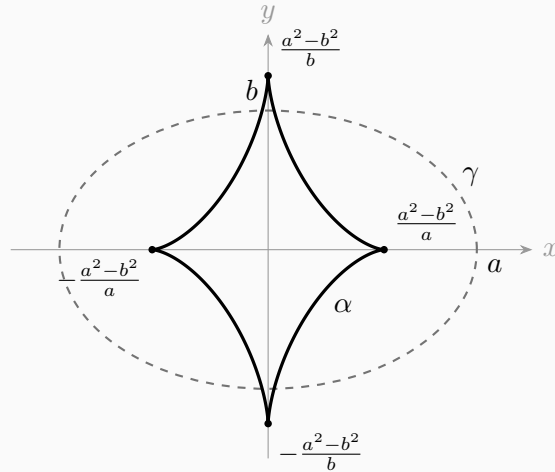
$$t = 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Ce sont précisément les paramètres des quatre sommets de l'ellipse, où  $k'(t) = 0$ .

Pour préciser la forme de la développée, posons  $A = (a^2 - b^2)/a$  et  $B = (b^2 - a^2)/b$ . Au voisinage de  $t = 0$ ,

$$\alpha(t) - \alpha(0) = \left( -\frac{3}{2}At^2 + O(t^4), Bt^3 + O(t^5) \right).$$

Les coefficients des ordres deux et trois sont non nuls et non colinéaires : il s'agit d'un rebroussement de première espèce. Il en est de même aux trois autres paramètres singuliers. La développée a la forme d'une astroïde étirée suivant les deux axes. Si  $a = b$ , l'ellipse est un cercle et sa développée se réduit à son centre.



h) Montrer que la développée d'une cycloïde est une cycloïde. On considère

$$\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t), \quad a > 0.$$

Sur un arc régulier, donc pour  $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ,

$$\gamma'(t) = a(1 - \cos t, \sin t), \quad \gamma''(t) = a(\sin t, \cos t).$$

On a

$$k(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}a\sqrt{1 - \cos t}}, \quad \rho(t) = 2\sqrt{2}a\sqrt{1 - \cos t}.$$

Puisque  $\det(\gamma', \gamma'') = -a^2(1 - \cos t) < 0$ , la normale principale est

$$\vec{n}(t) = \frac{(\sin t, \cos t - 1)}{\sqrt{2(1 - \cos t)}}.$$

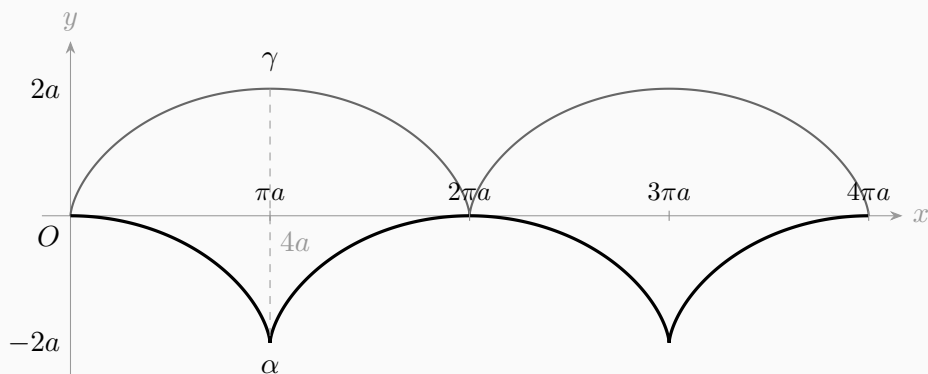
Par conséquent,

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= a(t - \sin t, 1 - \cos t) + 2a(\sin t, \cos t - 1) \\ &= \boxed{a(t + \sin t, \cos t - 1)}. \end{aligned}$$

Or

$$\boxed{\alpha(t) = \gamma(t + \pi) - (\pi a, 2a)}.$$

La développée est donc une cycloïde translatée. La formule obtenue se prolonge à tout  $t \in \mathbb{R}$ , même aux paramètres où la cycloïde initiale n'a pas de repère de Frenet. Les rebroussements de la nouvelle cycloïde correspondent à  $t = (2j + 1)\pi$ , avec  $j \in \mathbb{Z}$ .



**Exercice 21.** Soit  $\gamma$  une courbe plane régulière paramétrée par son abscisse curviligne. La **développante** de  $\gamma$  s'obtient de façon suivante. On prend un fil de longueur  $\ell$ , on fixe une extrémité du fil au point  $\gamma(0)$  et on laisse le fil suivre la courbe  $\gamma$  jusqu'en un point  $\gamma(s)$ ,  $0 \leq s < \ell$ , en tenant l'autre extrémité  $\beta(s)$  sous tension : la portion de fil d'extrémités  $\gamma(s)$  et  $\beta(s)$  est un segment de droite tangent à  $\gamma$  en  $\gamma(s)$ . La développante est la courbe décrite par le point  $\beta(s)$ .

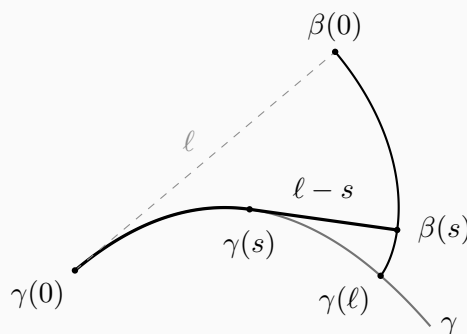
- Ecrire la représentation paramétrique de la développante.
- Montrer que la développante est régulière si la courbure de  $\gamma$  ne s'annule pas.
- Montrer que la normale à  $\beta$  en  $\beta(s)$  est la tangente à  $\gamma$  en  $\gamma(s)$ .
- Déterminer la courbure et le centre de courbure de la développante en  $s$ . En sachant que la développée d'une courbe est le lieu des centres de courbure, quelle est la développée de  $\beta$ ?
- Dessiner la développante du cercle.
- Quelle est la forme de la développante si le fil passe par un point d'inflexion sur  $\gamma$ ? Dessiner la développante de la courbe  $\gamma(t) = (t, t^3)$ .

### Corrigé

La courbe  $\gamma$  est paramétrée par son abscisse curviligne :  $\|\gamma'(s)\| = 1$ . On fixe  $\ell > 0$  et l'on considère  $0 \leq s < \ell$ . On suppose les courbes suffisamment dérivables pour les calculs considérés ; la classe  $C^3$  suffit pour les questions a)–e).

- a) **Écrire la représentation paramétrique de la développante.** La portion de fil qui suit la courbe a pour longueur  $s$ . La portion rectiligne restante a donc pour longueur  $\ell - s$  et suit le vecteur tangent unitaire  $\gamma'(s)$ . Ainsi,

$$\beta(s) = \gamma(s) + (\ell - s)\gamma'(s), \quad 0 \leq s < \ell.$$



- b) **Montrer que la développante est régulière si la courbure de  $\gamma$  ne s'annule pas.** En dérivant, on obtient

$$\beta'(s) = \gamma'(s) - \gamma'(s) + (\ell - s)\gamma''(s) = (\ell - s)\gamma''(s).$$

Aux points où  $k_\gamma(s) > 0$ , cela s'écrit

$$\beta'(s) = (\ell - s)k_\gamma(s)\vec{n}_\gamma(s), \quad \|\beta'(s)\| = (\ell - s)k_\gamma(s).$$

Comme  $\ell - s > 0$ , la développante est régulière exactement aux paramètres où  $k_\gamma(s) \neq 0$ . Si la formule se prolonge en  $s = \ell$ , on a  $\beta'(\ell) = 0$  ; cette borne est exclue de l'intervalle considéré.

- c) **Identifier la normale à la développante.** Sur un arc où  $k_\gamma > 0$ , le vecteur tangent unitaire de  $\beta$  est

$$\vec{T}_\beta(s) = \frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|} = \vec{n}_\gamma(s).$$

Bien que  $s$  ne soit pas l'abscisse curviligne de  $\beta$ , la direction de sa normale principale s'obtient en dérivant  $\vec{T}_\beta$  par rapport à ce paramètre croissant. Les formules de Frenet donnent

$$\vec{T}'_\beta(s) = \vec{n}'_\gamma(s) = -k_\gamma(s)\vec{T}_\gamma(s), \quad \vec{n}_\beta(s) = -\vec{T}_\gamma(s).$$

La normale à  $\beta$  en  $\beta(s)$  est donc la tangente à  $\gamma$  en  $\gamma(s)$ , puisque

$$\beta(s) + \mathbb{R}\vec{n}_\beta(s) = \gamma(s) + \mathbb{R}\vec{T}_\gamma(s).$$

- d) **Calculer la courbure et le centre de courbure de la développante.** Puisque  $s$  n'est pas l'abscisse curviligne de  $\beta$ , on utilise

$$k_\beta(s) = \frac{|\det(\beta'(s), \beta''(s))|}{\|\beta'(s)\|^3}.$$

On a

$$\beta'(s) = (\ell - s)\gamma''(s), \quad \beta''(s) = -\gamma''(s) + (\ell - s)\gamma'''(s),$$

d'où

$$|\det(\beta', \beta'')| = (\ell - s)^2 |\det(\gamma'', \gamma''')|.$$

Or, en abscisse curviligne,

$$\gamma'' = k_\gamma \vec{n}_\gamma, \quad \gamma''' = k'_\gamma \vec{n}_\gamma - k_\gamma^2 \vec{T}_\gamma.$$

Le repère  $(\vec{T}_\gamma, \vec{n}_\gamma)$  étant orthonormé,

$$|\det(\gamma'', \gamma''')| = k_\gamma^3.$$

Par conséquent,

$$k_\beta(s) = \frac{(\ell - s)^2 k_\gamma(s)^3}{(\ell - s)^3 k_\gamma(s)^3} = \frac{1}{\ell - s}, \quad \rho_\beta(s) = \ell - s.$$

Le centre de courbure de  $\beta$  est donc

$$\begin{aligned} \alpha_\beta(s) &= \beta(s) + \rho_\beta(s) \vec{n}_\beta(s) \\ &= \gamma(s) + (\ell - s) \vec{T}_\gamma(s) - (\ell - s) \vec{T}_\gamma(s) \\ &= \boxed{\gamma(s)}. \end{aligned}$$

Ainsi, la développée de la développante  $\beta$  est la courbe  $\gamma$ , sur les arcs où la courbure de  $\gamma$  ne s'annule pas.

- e) **Dessiner la développante du cercle.** Le cercle unité admet le paramétrage par longueur d'arc

$$\gamma(s) = (\cos s, \sin s), \quad \gamma'(s) = (-\sin s, \cos s).$$

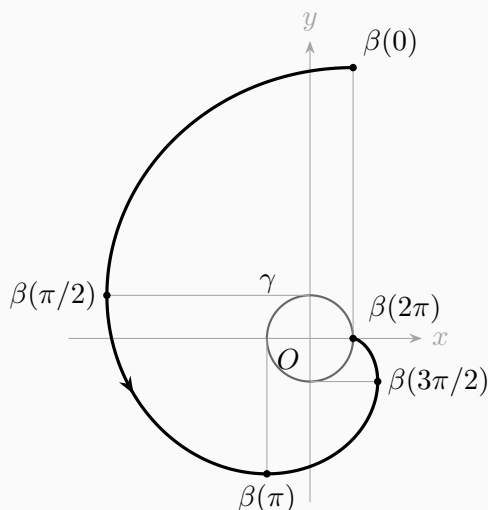
Sa développante est donc

$$\boxed{\beta(s) = (\cos s - (\ell - s) \sin s, \sin s + (\ell - s) \cos s)}.$$

Pour  $\ell = 2\pi$ , quelques points permettent de tracer la courbe :

| $s$        | 0             | $\pi/2$          | $\pi$          | $3\pi/2$        | $2\pi$ |
|------------|---------------|------------------|----------------|-----------------|--------|
| $\beta(s)$ | (1, 2 $\pi$ ) | (-3 $\pi/2$ , 1) | (-1, - $\pi$ ) | ( $\pi/2$ , -1) | (1, 0) |

La dernière valeur est celle du prolongement à la borne  $s = \ell$ . Les segments joignant  $\gamma(s)$  à  $\beta(s)$  sont tangents au cercle et leur longueur décroît de  $2\pi$  à 0.



f) **Que se passe-t-il lorsque le fil traverse un point d'inflexion ?** À un point d'inflexion de paramètre  $s_0 < \ell$ , on a  $\gamma''(s_0) = 0$ , donc

$$\beta'(s_0) = 0.$$

La développante devient singulière. Pour étudier la singularité, les dérivées successives vérifient

$$\beta'(s) = (\ell - s)\gamma''(s),$$

$$\beta''(s) = -\gamma''(s) + (\ell - s)\gamma'''(s),$$

$$\beta'''(s) = -2\gamma'''(s) + (\ell - s)\gamma^{(4)}(s),$$

$$\beta^{(m)}(s) = -(m-1)\gamma^{(m)}(s) + (\ell - s)\gamma^{(m+1)}(s), \quad m \geq 1.$$

Supposons l'inflexion d'ordre fini : il existe un entier impair  $q \geq 3$  tel que

$$\gamma''(s_0) = \dots = \gamma^{(q-1)}(s_0) = 0, \quad \gamma^{(q)}(s_0) \neq 0.$$

Alors

$$\beta'(s_0) = \dots = \beta^{(q-2)}(s_0) = 0, \quad \beta^{(q-1)}(s_0) = (\ell - s_0)\gamma^{(q)}(s_0) \neq 0.$$

Le premier ordre non nul  $q-1$  est pair : les deux demi-branches ont la même demi-tangente et la développante présente un rebroussement. Son type se détermine en recherchant ensuite la première dérivée qui n'est pas colinéaire à ce vecteur.

• **Dessiner la développante de  $\gamma(t) = (t, t^3)$ .** Cette courbe a un point d'inflexion en  $t = 0$ , mais elle n'est pas paramétrée par longueur d'arc :

$$\gamma'(t) = (1, 3t^2), \quad v(t) = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 9t^4}.$$

Choisissons un point de départ  $t_0 < 0$  et posons

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{1 + 9u^4} du, \quad s_0 = s(0), \quad L = \ell - s_0 > 0.$$

La condition  $\ell > s_0$  permet de dépasser le point d'inflexion. Avec le paramètre  $t$ , la formule de la développante devient

$$\beta(t) = \gamma(t) + (\ell - s(t)) \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{1+9t^4} &= 1 + \frac{9}{2}t^4 + O(t^8), \\ s(t) &= s_0 + t + \frac{9}{10}t^5 + O(t^9), \\ \frac{\ell - s(t)}{\sqrt{1+9t^4}} &= \left( L - t - \frac{9}{10}t^5 + O(t^9) \right) \left( 1 - \frac{9}{2}t^4 + O(t^8) \right) \\ &= L - t - \frac{9}{2}Lt^4 + O(t^5).\end{aligned}$$

En reportant dans  $\beta(t)$ , il vient

$$\begin{aligned}\beta(t) &= \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} + \left( L - t - \frac{9}{2}Lt^4 + O(t^5) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} L - \frac{9}{2}Lt^4 + O(t^5), & 3Lt^2 - 2t^3 + O(t^6) \end{pmatrix}}.\end{aligned}$$

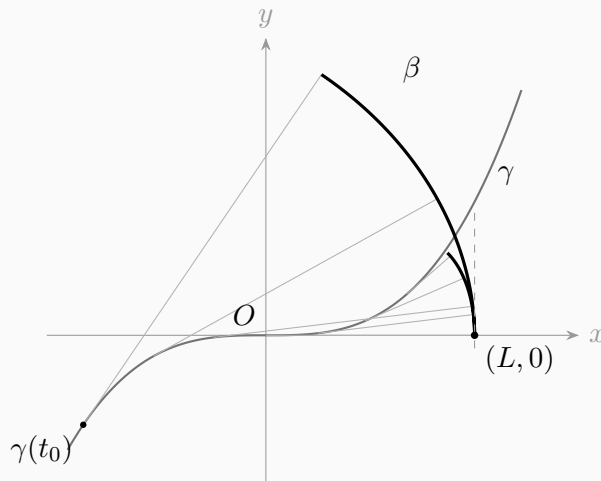
Toutes les fonctions intervenant ici sont  $C^\infty$  ; les coefficients du développement de Taylor donnent

$$\begin{aligned}\beta(0) &= (L, 0), & \beta'(0) &= (0, 0), \\ \beta''(0) &= (0, 6L), & \beta'''(0) &= (0, -12), \\ \beta^{(4)}(0) &= (-108L, 0).\end{aligned}$$

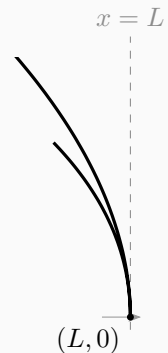
La première dérivée non nulle est d'ordre 2. La dérivée troisième lui est colinéaire, tandis que  $\beta^{(4)}(0)$  ne l'est pas. Les deux ordres caractéristiques sont donc 2 et 4 :

la développante présente un rebroussement de deuxième espèce en  $\beta(0) = (L, 0)$ .

La tangente  $y$  est verticale, d'équation  $x = L$ . Pour  $t \neq 0$  assez petit, les deux branches sont du côté  $x < L$  et au-dessus de  $y = 0$ .



**Zoom au rebroussement**



Échelles différentes sur les deux axes.