FICHE TD 2 - SOUS-VARIÉTÉS

Liste des exercices

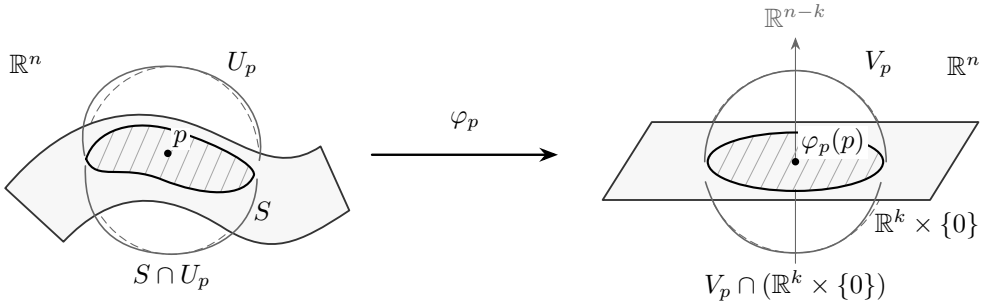
Caractérisation des sous-variétés par leur définition 49
Exercice 1 — Intervalles et sous-variétés de dimension maximale 49
Exercice 2 — Ensembles discrets et accumulation de droites 50
Exercice 3 — Intersections de sous-variétés 51
Exercice 4 — Produit de sous-variétés et tore de dimension n 53
Caractérisation des sous-variétés par submersions 54
Exercice 5 — Niveaux réguliers et niveaux singuliers 54
Exercice 6 — Graphes et submersions 55
Exercice 7 — Cubique et fenêtre de Viviani 56
Exercice 8 — Partie régulière de la fenêtre de Viviani 57
Exercice 9 — Groupes linéaire, spécial linéaire et orthogonal 58
Caractérisation des sous-variétés par immersions 59
Exercice 10 — Courbe cuspidale et demi-courbes 59
Exercice 11 — Spirale logarithmique 60
Exercice 12 — Paramétrages locaux et fonctions implicites 61
Exercice 13 — Coordonnées sphériques et projection de Mercator 62
Exercice 14 — Tore de révolution et courbe irrationnelle dense 64
Exercices facultatifs de topologie générale 66
Exercice 15 — Restriction d'applications continues 66
Exercice 16 — Recollement d'applications continues 66

Rappel – Définition de sous-variété

Soient $r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et $0 \leq k \leq n$. Une partie $S \subset \mathbb{R}^n$ est une **sous-variété de classe** C^r (**lisse** si $r = \infty$), de **dimension** k, si, pour tout $p \in S$, il existe un voisinage ouvert $U_p \subset \mathbb{R}^n$ de p et un C^r-difféomorphisme $\varphi_p : U_p \longrightarrow V_p := \varphi_p(U_p)$, où $V_p \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, tels que

$$\boxed{\varphi_p(S \cap U_p) = \big(\mathbb{R}^k \times \{0\}\big) \cap V_p.}$$

Ici $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ dont les $n-k$ dernières coordonnées sont nulles. Autrement dit, φ_p **aplatit** S **autour de** p sur ce sous-espace.



Exercice 1.

a) Le segment ouvert $]a, b[\subset \mathbb{R}$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}$?

b) Et le segment fermé $[a, b] \subset \mathbb{R}$?

c) Montrer qu'une sous-variété $S \subset \mathbb{R}^n$ de dimension n est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Corrigé

On suppose $a < b$. Dans cette fiche, le terme *sous-variété* désigne une sous-variété **sans bord**.

a) • **Le segment ouvert** $]a, b[$ **est-il une sous-variété de** $\mathbb{R}$ **? Oui, de dimension** 1. Pour tout $p \in]a, b[$, on peut choisir $U_p =]a, b[$ comme voisinage ouvert de p, et l'identité $\varphi_p = \mathrm{id}$ sur $]a, b[$ comme difféomorphisme, car celui-ci vérifie

$$\varphi_p(U_p \cap]a, b[) = U_p = \varphi_p(U_p) \cap \mathbb{R}.$$

C'est exactement la condition de la définition.

b) • **Et le segment fermé** $[a, b]$ **? Non.** Les points de $[a, b]$ ne sont pas isolés, donc si l'intervalle fermé était une sous-variété de $\mathbb{R}$, il aurait dimension 1. Supposons qu'il existe, au voisinage de a, un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ et un difféomorphisme $\varphi : U \to \varphi(U)$ tels que

$$\varphi(U \cap [a, b]) = \varphi(U) \cap \mathbb{R} = \varphi(U).$$

L'injectivité de φ imposerait $U \cap [a, b] = U$, donc $U \subset [a, b]$. Ceci est impossible : tout voisinage ouvert de a contient des points strictement inférieurs à a. Le même problème se présente en b.

c) • **Montrer qu'une sous-variété de dimension** n **de** $\mathbb{R}^n$ **est un ouvert.** Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension n. Pour tout $p \in S$, la définition fournit un voisinage ouvert $U_p \subset \mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme φ_p tels que

$$\varphi_p(U_p \cap S) = \varphi_p(U_p) \cap \mathbb{R}^n = \varphi_p(U_p).$$

Comme φ_p est injective, ceci implique que $U_p \cap S = U_p$, c'est-à-dire $U_p \subset S$. Ainsi tout point de S possède un voisinage ouvert contenu dans S, et

$$\boxed{S = \bigcup_{p \in S} U_p \quad \text{est un ouvert de } \mathbb{R}^n.}$$

Corrigé (suite)

N.B. Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte, il n'est pas nécessaire que la famille $(U_p)_{p\in S}$ soit dénombrable.

Exercice 2.

a) L'ensemble $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$ des entiers positifs est-il une sous-variété de $\mathbb{R}$?

b) Montrer qu'une sous-variété $S \subset \mathbb{R}^n$ de dimension 0 est un ensemble de points isolés. Cet ensemble peut-il être dénombrable ? Et non dénombrable ?

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit L_n la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x = 1/n$. L'ensemble $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} L_n \subset \mathbb{R}^2$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

d) Soit M_0 la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x = 0$ et posons $M' = M \cup M_0$. L'ensemble M' est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

Corrigé

a) • **L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}$? Oui, de dimension 0.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\varphi_n : U_n = \left]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right[\longrightarrow \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \quad x \mapsto \varphi_n(x) = x - n.$$

Alors φ_p est un difféomorphisme et

$$\varphi_n(U_n \cap \mathbb{N}^*) = \varphi_n(\{n\}) = \{0\} = \varphi_n(U_n) \cap \{0\}.$$

b) • **Montrer qu'une sous-variété de dimension 0 est un ensemble de points isolés. Peut-elle être non dénombrable ?** Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension 0. Puisque $\mathbb{R}^0 \times \{0\} = \{0\}$, pour tout $p \in S$, il existe un ouvert U_p et un difféomorphisme φ_p tels que

$$\varphi_p(U_p \cap S) = \varphi_p(U_p) \cap \{0\} = \{0\}.$$

Par injectivité, $U_p \cap S = \{p\}$, donc p est isolé dans S. Réciproquement, si chaque point est isolé, une translation $x \mapsto x - p$ sur un voisinage qui ne rencontre S qu'en p fournit la carte requise.

Un tel ensemble peut être infini dénombrable, comme $\mathbb{N}^*$, mais il est **nécessairement au plus dénombrable**. En effet, $\mathbb{R}^n$ possède la base dénombrable d'ouverts

$$\mathcal{B} = \{B(q, r) \mid q \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}.$$

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, pour chaque $p \in S$ on peut choisir un voisinage ouvert $V_p \in \mathcal{B}$ tel que $p \in V_p \subset U_p$ et, par hypothèse, on a donc $V_p \cap S = \{p\}$. Si $p \neq p'$, alors $V_p \neq V_{p'}$, car $V_p \cap S = \{p\} \neq \{p'\} = V_{p'} \cap S$. L'application $p \mapsto V_p$ est ainsi une injection de S dans l'ensemble dénombrable $\mathcal{B}$.

Attention. Un ensemble de points isolés n'est pas nécessairement fermé. Par exemple,

$$A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} \subset \mathbb{R}$$

est discret, mais 0 est un point d'accumulation de A qui n'appartient pas à A.

c) • **La réunion $M = \bigcup_{n\geq 1} L_n$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$? Oui, de dimension 1.** Posons

$$I_1 = \left]\frac{1}{2}, 2\right[, \qquad I_n = \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right[\quad (n \geq 2).$$

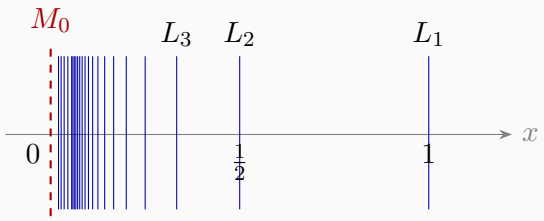
Pour $(a, b) \in M$, il existe un unique n tel que $a = 1/n$. L'ouvert $U = I_n \times \mathbb{R}$ ne rencontre que la droite L_n, et

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R} \times \left(I_n - \frac{1}{n}\right), \qquad \varphi(x, y) = \left(y, x - \frac{1}{n}\right)$$

est un difféomorphisme affine. Il vérifie

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(L_n) = \mathbb{R} \times \{0\} = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}).$$

Corrigé (suite)



Les droites L_n s'accumulent vers M_0.

d) • **Et $M' = M \cup M_0$, où $M_0 = \{x = 0\}$? Non.** L'ensemble M' n'est ni discret ni ouvert ; s'il était une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, sa dimension serait donc 1. Supposons qu'il existe une carte redressante $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ sur un voisinage ouvert U de $(0,0)$, avec $\varphi(0,0) = (0,0)$ et

$$\varphi(U \cap M') = \varphi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}).$$

La seconde composante φ_2 est nulle sur $U \cap M'$. Pour t assez petit, $(0,t) \in U \cap M'$, donc

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_2(0,t) - \varphi_2(0,0)}{t} = 0.$$

De même, pour n assez grand, $(1/n, 0) \in U \cap M'$. Puisque la dérivée partielle en x existe, on peut la calculer le long de cette suite :

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0,0) = \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi_2(1/n,0) - \varphi_2(0,0)}{1/n} = 0.$$

Ainsi la seconde ligne de $J\varphi(0,0)$ est nulle. Cette matrice n'est pas inversible, contrairement à ce qu'impose l'existence d'un difféomorphisme.

Exercice 3.

a) Donner un exemple d'intersection de deux sous-variétés de $\mathbb{R}^3$ qui est une sous-variété.

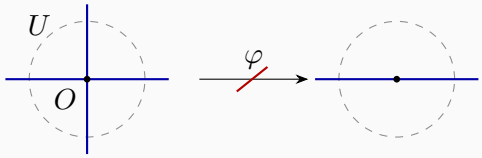
b) Donner un exemple d'intersection de deux sous-variétés de $\mathbb{R}^3$ qui *n'est pas* une sous-variété.

Corrigé

Rappel : la croix n'est pas une sous-variété du plan. Soit $K = \{x = 0\} \cup \{y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Elle n'est ni discrète ni ouverte ; la seule dimension possible serait 1. Si $\varphi : U \to \varphi(U)$ redressait K au voisinage de O, alors les deux courbes $t \mapsto \varphi(t,0)$ et $t \mapsto \varphi(0,t)$ auraient leurs images dans $\mathbb{R} \times \{0\}$. En dérivant en 0, on aurait

$$d\varphi_O(1,0) \in \mathbb{R} \times \{0\}, \qquad d\varphi_O(0,1) \in \mathbb{R} \times \{0\}.$$

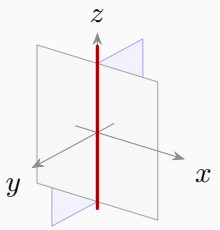
Les images de deux vecteurs indépendants seraient colinéaires, ce qui contredit l'inversibilité de $d\varphi_O$.



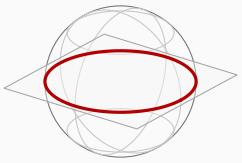
deux directions — une direction

a) • **Donner des exemples d'intersections qui sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$.** Les deux plans $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$ se coupent suivant l'axe Oz, qui est une sous-variété de dimension 1. La sphère unité et le plan $\{z = 0\}$ se coupent suivant le cercle équatorial, également de dimension 1. Enfin, le plan $\{z = 0\}$ et l'axe Oz se coupent en un point, sous-variété de dimension 0.

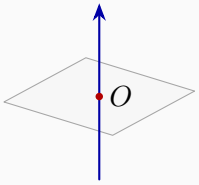
Corrigé (suite)



deux plans : une droite



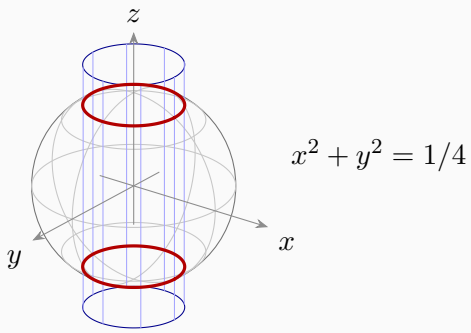
sphère et plan : un cercle



plan et axe : un point

Un exemple non connexe est fourni par la sphère unité et le cylindre $\{x^2 + y^2 = 1/4\}$: leur intersection est la réunion des deux cercles

$$\left\{x^2+y^2=\frac{1}{4},\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{x^2+y^2=\frac{1}{4},\ z=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$



Deux cercles disjoints.

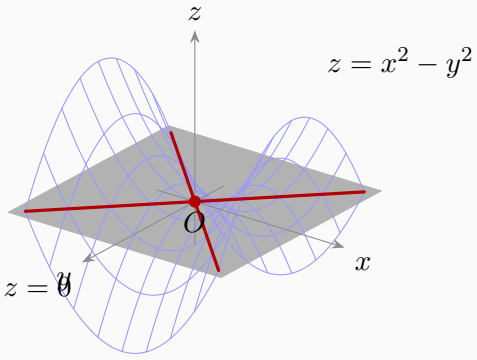
b) • **Donner des exemples d'intersections qui ne sont pas des sous-variétés.** Les deux surfaces

$$S_1 = \{z = x^2 - y^2\}, \qquad S_2 = \{z = 0\}$$

sont des sous-variétés lisses : la première est le graphe d'une fonction lisse, la seconde est un plan. Leur intersection est

$$S_1 \cap S_2 = \{z = 0,\ y = x\} \cup \{z = 0,\ y = -x\},$$

une croix. Elle n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$: aux points autres que O, elle est localement une droite, alors qu'en O les deux directions indépendantes $(1, 1, 0)$ et $(1, -1, 0)$ devraient toutes deux être envoyées sur la même droite par la différentielle d'une carte redressante. C'est impossible.

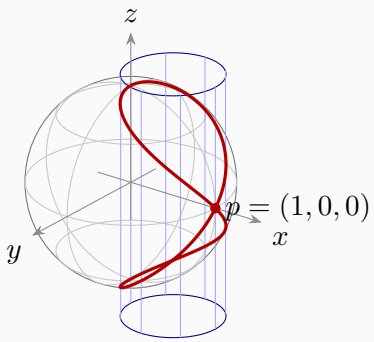


La **fenêtre de Viviani** est un autre exemple : c'est l'intersection

$$\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cap \{(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4\}.$$

La sphère et le cylindre sont lisses, mais l'intersection possède un point double en $(1, 0, 0)$; ce point sera étudié dans l'exercice 7.

Corrigé (suite)

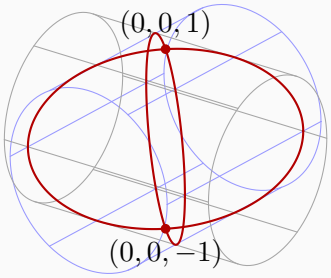


La fenêtre de Viviani.

On peut aussi prendre les deux cylindres

$$C_1 = \{x^2 + z^2 = 1\}, \qquad C_2 = \{y^2 + z^2 = 1\}.$$

Chacun est lisse. Leur intersection est la réunion des deux ellipses situées dans les plans $y = x$ et $y = -x$, qui se croisent aux points $(0, 0, \pm 1)$ avec des directions tangentes distinctes.



Attention. Le cône $\{z^2 = x^2 + y^2\}$ et le plan $\{x = 0\}$ se coupent aussi suivant une croix, mais ce n'est pas un exemple répondant à la question : le cône n'est lui-même pas une sous-variété en son sommet.

Exercice 4. Soit $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ le cercle unitaire. Montrer que le n**-tore**

$$T^n := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n}$$

est une sous-variété lisse de dimension n de $\mathbb{R}^{2n}$.

Corrigé

• **Montrer que $T^n = (\mathbb{S}^1)^n$ est une sous-variété lisse de dimension n de $\mathbb{R}^{2n}$.** On utilise le résultat suivant, que l'on démontre directement à partir de la définition.

Lemme. Si $S \subset \mathbb{R}^m$ et $S' \subset \mathbb{R}^{m'}$ sont des sous-variétés de dimensions respectives k et k', alors $S \times S'$ est une sous-variété de dimension $k + k'$ de $\mathbb{R}^{m+m'}$.

Preuve. Fixons $(p, p') \in S \times S'$. Il existe des cartes redressantes $\varphi : U \to \varphi(U)$ et $\varphi' : U' \to \varphi'(U')$ telles que

$$\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{m-k}),$$
$$\varphi'(U' \cap S') = \varphi'(U') \cap (\mathbb{R}^{k'} \times \{0\}^{m'-k'}).$$

L'application produit $\varphi \times \varphi'$ est un difféomorphisme sur l'ouvert $U \times U'$, et

$$(U \times U') \cap (S \times S') = (U \cap S) \times (U' \cap S').$$

L'image de cette intersection est donc la partie de $(\varphi \times \varphi')(U \times U')$ située dans le sous-espace

$$(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{m-k}) \times (\mathbb{R}^{k'} \times \{0\}^{m'-k'}).$$

Corrigé (suite)

Il suffit de regrouper les coordonnées libres. Plus précisément, l'isomorphisme linéaire

$$\sigma(a,b,c,d) = (a,c,b,d),$$

où $a \in \mathbb{R}^k$, $b \in \mathbb{R}^{m-k}$, $c \in \mathbb{R}^{k'}$ et $d \in \mathbb{R}^{m'-k'}$, envoie ce sous-espace sur $\mathbb{R}^{k+k'} \times \{0\}^{m+m'-k-k'}$. Ainsi $\Phi = \sigma \circ (\varphi \times \varphi')$ vérifie

$$\Phi\big((U \times U') \cap (S \times S')\big) = \Phi(U \times U') \cap (\mathbb{R}^{k+k'} \times \{0\}^{m+m'-k-k'}).$$

C'est une carte redressante de $S \times S'$.

Le cercle $\mathbb{S}^1$ est une sous-variété lisse de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$. En appliquant le lemme par récurrence, on obtient

$$\boxed{T^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ facteurs}} \text{ est une sous-variété de dimension } n \text{ de } \mathbb{R}^{2n}.}$$

Caractérisation des sous-variétés par submersions

Rappel – Caractérisation par submersions

Théorème. Une partie $S \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe C^r et de dimension k si et seulement si, pour tout $p \in S$, il existe un voisinage ouvert $U_p \subset \mathbb{R}^n$ de p, une application

$$f_p : U_p \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k} \quad \text{de classe } C^r$$

et une **valeur régulière** $c \in \mathbb{R}^{n-k}$ de f_p tels que

$$\boxed{S \cap U_p = f_p^{-1}(c).}$$

Rappel : Une valeur $c \in \mathbb{R}^{n-k}$ est **régulière** si, pour tout $x \in f_p^{-1}(c)$, la différentielle

$$(df_p)_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k} \quad \text{est surjective, c'est-à-dire} \quad \operatorname{rang}(df_p)_x = n-k.$$

Corollaire. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Si $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ est une **submersion de classe** C^r, c'est-à-dire si

$$\operatorname{rang} df_x = n-k \qquad \text{pour tout } x \in U,$$

alors, pour tout $c \in \mathbb{R}^{n-k}$, l'ensemble $S = f^{-1}(c)$ est, s'il est non vide, une sous-variété de classe C^r et de dimension k de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5.

a) Pour quels valeurs de α l'ensemble $A_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = \alpha\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

b) Pour quels valeurs de β l'ensemble $B_\beta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 = \beta\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

Corrigé

a) • **Pour quelles valeurs de α l'ensemble A_α est-il une sous-variété ?** Posons

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_\alpha(x,y) = x^2 - y^2 - \alpha.$$

Alors $A_\alpha = f_\alpha^{-1}(0)$ et

$$\nabla f_\alpha(x,y) = (2x, -2y).$$

Le gradient ne s'annule qu'en $(0,0)$, et ce point appartient au niveau $f_\alpha^{-1}(0)$ si et seulement si $\alpha = 0$. Si $\alpha \neq 0$, df_α est donc de rang 1 en tout point de A_α : 0 est une valeur régulière et A_α est une sous-variété lisse de dimension $2 - 1 = 1$.

Corrigé (suite)

Pour $\alpha = 0$,

$$A_0 = \{x^2 - y^2 = 0\} = \{y = x\} \cup \{y = -x\}$$

est une croix, qui n'est pas une sous-variété au point $(0, 0)$. Ainsi

$$\boxed{A_\alpha \text{ est une sous-variété de } \mathbb{R}^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \neq 0.}$$

b) • **Pour quelles valeurs de β l'ensemble B_β est-il une sous-variété ?** Posons

$$g_\beta(x, y) = x^3 - y^3 - \beta, \qquad B_\beta = g_\beta^{-1}(0).$$

On a $\nabla g_\beta(x, y) = (3x^2, -3y^2)$, qui ne s'annule qu'à l'origine. Comme précédemment, si $\beta \neq 0$, 0 est une valeur régulière de g_β, donc B_β est une sous-variété de dimension 1.

Pour $\beta = 0$, la fonction cube étant injective sur $\mathbb{R}$,

$$B_0 = \{x^3 = y^3\} = \{x = y\}.$$

C'est une droite, donc aussi une sous-variété de dimension 1. On peut la définir comme le niveau zéro de la submersion $\widetilde{g}(x, y) = x - y$, dont le gradient est $(1, -1)$. Finalement,

$$\boxed{B_\beta \text{ est une sous-variété de dimension 1 pour tout } \beta \in \mathbb{R}.}$$

À retenir. Si une équation définissant un ensemble possède un point critique sur cet ensemble, cela ne suffit pas à conclure que l'ensemble n'est pas une sous-variété. Il faut alors un autre argument, ou une autre équation.

Exercice 6. Les sous-ensembles suivants, sont-ils des sous-variétés ?

a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^5 - 3y^2 - z = 0\}$

b) $S_2 = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 \mid xy^2 - u = 0,\ x^3 + 3yz - v = 0\}$

c) $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy^2 - z = 0,\ x + y = 0\}$

Corrigé

a) • **L'ensemble S_1 est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^3$? Oui.** C'est le graphe de l'application lisse

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f_1(x, y) = x^5 - 3y^2.$$

Il s'agit donc d'une sous-variété lisse de dimension 2. On peut aussi utiliser la submersion $g_1(x, y, z) = x^5 - 3y^2 - z$, puisque

$$\frac{\partial g_1}{\partial z} = -1 \neq 0, \qquad S_1 = g_1^{-1}(0).$$

b) • **L'ensemble S_2 est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^5$? Oui.** C'est le graphe de l'application lisse

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad f_2(x, y, z) = (xy^2, x^3 + 3yz).$$

Ainsi S_2 est une sous-variété lisse de dimension 3. Équivalemment, pour

$$g_2(x, y, z, u, v) = (xy^2 - u, x^3 + 3yz - v),$$

la matrice jacobienne

$$Jg_2 = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & 0 & -1 & 0 \\ 3x^2 & 3z & 3y & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 partout, grâce aux deux dernières colonnes. Le niveau $S_2 = g_2^{-1}(0, 0)$ a donc bien dimension $5 - 2 = 3$.

c) • **L'ensemble S_3 est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^3$? Oui.** Posons

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad f_3(x, y, z) = (xy^2 - z, x + y).$$

Corrigé (suite)

Alors $S_3 = f_3^{-1}(0,0)$ et

$$Jf_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le mineur formé par les deuxième et troisième colonnes vaut

$$\det \begin{pmatrix} 2xy & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

L'application f_3 est une submersion ; son niveau zéro est donc une sous-variété lisse de dimension $3 - 2 = 1$.

Exercice 7. Les sous-ensembles suivants, sont-ils des sous-variétés ?

a) La cubique $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 13 = 0\}$.

b) La fenêtre de Viviani $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 - x = 0\}$.

Corrigé

a) • **La cubique est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?** Posons

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 13.$$

La cubique est $S = f^{-1}(0)$ et

$$\nabla f(x,y,z) = 3(x^2 - yz,\ y^2 - xz,\ z^2 - xy).$$

Si ce gradient était nul, on aurait

$$x^2 = yz, \qquad y^2 = xz, \qquad z^2 = xy.$$

En multipliant respectivement ces égalités par x, y et z, puis en les additionnant, on obtiendrait

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz.$$

Mais sur S, on a $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 13$: c'est une contradiction. Ainsi ∇f ne s'annule pas sur S, et

$$\boxed{S \text{ est une sous-variété lisse de dimension 2 de } \mathbb{R}^3.}$$

b) • **La fenêtre de Viviani est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?** En soustrayant les deux équations qui la définissent, on obtient

$$C = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = 1 - z^2\}.$$

On peut donc aussi la voir comme l'intersection de la sphère unité et d'un cylindre parabolique. Posons

$$g(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1,\ x + z^2 - 1).$$

Alors $C = g^{-1}(0,0)$ et

$$Jg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 0 & 2z \end{pmatrix}.$$

Si $y \neq 0$, le mineur des deux premières colonnes vaut $-2y \neq 0$. Si $y = 0$ et $(x,y,z) \in C$, les équations donnent

$$y^2 = z^2(1 - z^2) = 0,$$

donc soit $z = 0$ et $x = 1$, soit $z = \pm 1$ et $x = 0$. Aux points $(0,0,\pm 1)$, le mineur des colonnes x, z vaut $2z(2x - 1) = -2z \neq 0$. Le seul point de C où le rang tombe à 1 est

$$p = (1,0,0).$$

La courbe $C \setminus \{p\}$ est donc une sous-variété lisse de dimension 1.

Étudions le point p. Au voisinage de p, les équations sont

$$x = 1 - z^2, \qquad y^2 = z^2(1 - z^2).$$

Corrigé (suite)

Pour $|z| < 1$, on obtient deux branches lisses

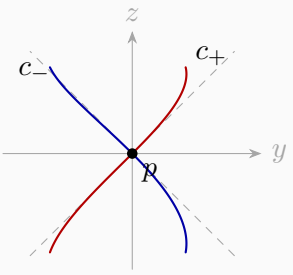
$$c_\pm(z) = \big(1 - z^2,\ \pm z\sqrt{1 - z^2},\ z\big),$$

qui se coupent en p et dont les vecteurs tangents sont

$$c'_+(0) = (0, 1, 1), \qquad c'_-(0) = (0, -1, 1).$$

Ces deux vecteurs sont indépendants. Une carte redressant C en une droite près de p devrait envoyer ces deux vecteurs sur cette même droite, ce qui est incompatible avec l'inversibilité de sa différentielle. Ainsi p est un **point double**, et

$$\boxed{C \text{ n'est pas une sous-variété de } \mathbb{R}^3.}$$



Exercice 8. Considérons la sphère $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et le cylindre

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\right\}.$$

Quel est le sous-espace maximale de l'intersection $\mathbb{S}^2 \cap C$ qui forme une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

Corrigé

- **Quelle partie maximale de $\mathbb{S}^2 \cap C$ forme une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?** Posons

$$f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2 - 1,\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4}\right).$$

On a $\mathbb{S}^2 \cap C = f^{-1}(0, 0)$ et

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x - 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

Les trois mineurs de taille 2 sont

$$2y, \qquad -2z(2x - 1), \qquad -4yz.$$

Le rang est inférieur à 2 exactement lorsque

$$y = 0 \quad \text{et} \quad \big(z = 0 \text{ ou } x = 1/2\big).$$

La première colonne n'est jamais nulle ; le rang vaut alors 1.
Sur la droite $\{x = 1/2, y = 0\}$, la deuxième composante de f vaut $-1/4$: aucun de ses points n'appartient au niveau zéro. Sur l'axe $\{y = z = 0\}$, les équations du niveau donnent

$$x^2 = 1, \qquad x^2 - x = 0,$$

donc $x = 1$. Le seul point du niveau où df n'est pas surjective est ainsi $p = (1, 0, 0)$.
Il en résulte que

$$\boxed{M_{\text{reg}} = (\mathbb{S}^2 \cap C) \setminus \{(1, 0, 0)\}}$$

est une sous-variété lisse de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$. C'est la partie régulière de la fenêtre de Viviani. Elle est maximale pour l'inclusion : le seul point que l'on puisse lui ajouter est p, et l'exercice 7 montre que cet ajout ne donne pas une sous-variété.

Exercice 9.

a) Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ est-il une sous-variété de l'espace de matrices $M_n(\mathbb{R})$?

b) Montrer que le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{R})$, des matrices inversibles de déterminant 1, est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. De quelle dimension ?

c) Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$, des matrices A telles que ${}^tAA = 1$, est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. De quelle dimension ?

Corrigé

On identifie $M_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$.

a) • **Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ est-il une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$? Oui.** On a

$$GL_n(\mathbb{R}) = \det{}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

où l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ est polynomiale, donc lisse. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$, et par conséquent une sous-variété lisse de même dimension :

$$\boxed{\dim GL_n(\mathbb{R}) = n^2.}$$

b) • **Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété et calculer sa dimension.** On a

$$SL_n(\mathbb{R}) = \det{}^{-1}(1).$$

Calculons la différentielle du déterminant en une matrice inversible A. Pour $H \to 0$,

$$\det(A + H) = \det(A) \det(I_n + A^{-1}H).$$

En utilisant $\det(I_n + K) = 1 + \operatorname{tr}(K) + O(\|K\|^2)$, on obtient

$$\det(A + H) = \det(A) + \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}H) + O(\|H\|^2).$$

Ainsi

$$\boxed{d(\det)_A(H) = \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}H).}$$

Pour $A \in SL_n(\mathbb{R})$, cette forme linéaire est non nulle : par exemple, $d(\det)_A\left(\frac{1}{n}A\right) = 1$. Le nombre 1 est donc une valeur régulière du déterminant, d'où

$$\boxed{SL_n(\mathbb{R}) \text{ est une sous-variété lisse de dimension } n^2 - 1.}$$

c) • **Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété et calculer sa dimension.** On a

$$O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n),$$

où $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ est donnée par $f(A) = A^{\mathsf{T}}A$. Pour $H \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$f(A + H) - f(A) = A^{\mathsf{T}}H + H^{\mathsf{T}}A + H^{\mathsf{T}}H,$$

donc

$$df_A(H) = A^{\mathsf{T}}H + H^{\mathsf{T}}A.$$

Mais la valeur I_n *n'est pas regulière pour* f, car la différentielle df_A n'est pas surjective sur $M_n(\mathbb{R})$.

Cependant, on remarque que les matrices $f(A) = A^{\mathsf{T}}A = S$ sont **symétriques**, i.e. $S^{\mathsf{T}} = S$, et l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$. Notons-le $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$. On peut alors voir $O_n(\mathbb{R}) = g^{-1}(I_n)$ avec

$$g : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \qquad g(A) = A^{\mathsf{T}}A$$

et $dg_A(H) = df_A(H)$. Cette fois, la différentielle $df_A : M_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ est surjective pour tout $A \in O_n(\mathbb{R})$: pour $S \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ on a

$$dg_A\left(\frac{1}{2}AS\right) = \frac{1}{2}A^{\mathsf{T}}AS + \frac{1}{2}S^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}A = S.$$

Donc I_n est une valeur regulière pour g, et par le théorème des valeurs régulières on a

$$\boxed{\dim O_n(\mathbb{R}) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.}$$

Rappel – Caractérisation par immersions

Théorème. Une partie $S \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe C^r et de dimension k si et seulement si, pour tout $p \in S$, il existe un voisinage ouvert $U_p \subset \mathbb{R}^n$ de p, un ouvert $V_p \subset \mathbb{R}^k$ et une application de classe C^r

$$F_p : V_p \longrightarrow U_p$$

qui est une **immersion**, c'est-à-dire que, pour tout $x \in V_p$,

$$(dF_p)_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{est injective, c'est-à-dire} \quad \operatorname{rang}(dF_p)_x = k,$$

et qui vérifie

$$\boxed{F_p(V_p) = S \cap U_p, \qquad F_p : V_p \longrightarrow S \cap U_p \text{ est un homéomorphisme,}}$$

où l'ensemble $S \cap U_p$ est muni de la **topologie induite par** $\mathbb{R}^n$.
On appelle F_p une **paramétrisation locale** de S.

Exercice 10. Le support du cusp $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ pour $t \in \mathbb{R}$, est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$? Et si on prend $t \geq 0$? Et pour $t > 0$?

Corrigé

• **Le support de $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ est-il une sous-variété, selon le domaine du paramètre ? Pour $t > 0$: oui.** La dérivée

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$$

ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. De plus, γ est injective et son inverse sur l'image est

$$\gamma^{-1}(x, y) = \sqrt{x},$$

qui est lisse pour $x > 0$. Ainsi γ est un **plongement** (une immersion qui est un homéomorphisme sur l'image), et donc son support

$$C_+ = \{(x, x^{3/2}) \mid x > 0\}$$

est une sous-variété lisse de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$.

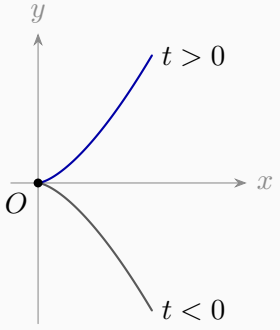
Pour $t \geq 0$: non (c'est une *sous-variété à bord* !). **Pour $t \in \mathbb{R}$: non également.** Dans les deux cas, l'origine appartient au support. Montrons qu'aucun paramétrage local régulier, défini sur un intervalle *ouvert* autour de 0, ne peut décrire le support au voisinage de l'origine.
Soit $\eta(s) = (x(s), y(s))$ un tel paramétrage, avec $\eta(0) = (0, 0)$. Sur la courbe cuspidale, on a

$$x(s) \geq 0, \qquad y(s)^2 = x(s)^3.$$

La fonction x atteint un minimum en $s = 0$, point intérieur de son domaine, donc $x'(0) = 0$. De plus,

$$\left|\frac{y(s) - y(0)}{s}\right| = \sqrt{x(s)} \left|\frac{x(s) - x(0)}{s}\right| \underset{s \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi $y'(0) = 0$ également, et $\eta'(0) = (0, 0)$, en contradiction avec la régularité. Les supports considérés ne sont ni discrets ni ouverts : la seule dimension possible aurait été 1. Ils ne sont donc pas des sous-variétés sans bord.



Corrigé (suite)

Remarque. La demi-courbe correspondant à $t \geq 0$ admet le paramétrage $x \mapsto (x, x^{3/2})$, pour $x \geq 0$, régulier et de classe C^1 jusqu'au bord. Cela ne contredit pas le résultat : le paramètre 0 est alors une extrémité du domaine, et non un point intérieur. Comme dans le TD 1, cette demi-courbe n'admet pas de paramétrage C^2 régulier jusqu'à l'origine.

Exercice 11. Le support de la spirale logarithmique $\gamma(t) = e^{at}(\cos t, \sin t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

Corrigé

• **Le support de la spirale logarithmique est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?** Supposons d'abord $a \neq 0$. On a

$$\gamma(t) = e^{at}(\cos t, \sin t), \qquad \|\gamma(t)\| = e^{at} > 0,$$

et

$$\gamma'(t) = e^{at}(a\cos t - \sin t,\ a\sin t + \cos t), \qquad \|\gamma'(t)\|^2 = e^{2at}(a^2+1) > 0.$$

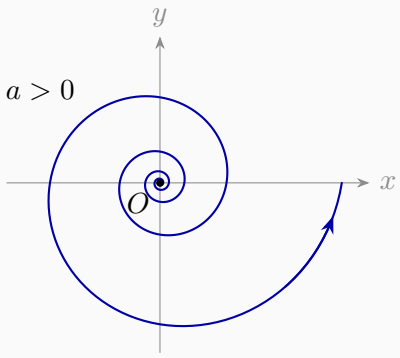
Le paramétrage est donc une immersion. La fonction $t \mapsto e^{at}$ est injective ; γ l'est donc aussi, et son inverse sur l'image est donné par

$$\gamma^{-1}(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2a}.$$

Cette application est continue puisque l'image ne contient pas l'origine. Ainsi γ est un plongement et

$$\boxed{\gamma(\mathbb{R}) \text{ est une sous-variété lisse de dimension 1 de } \mathbb{R}^2.}$$

Pour $a = 0$, le support est le cercle unité $\mathbb{S}^1$, qui est lui aussi une sous-variété lisse. Le paramétrage est alors périodique, donc non injectif, mais son support peut être décrit par la restriction du paramètre à $t \in [0, 2\pi]$ et reste donc une sous-variété.



Le point limite O ne fait pas partie du support.

• **Que se passe-t-il si l'on ajoute le point limite $O = (0,0)$, lorsque $a \neq 0$?** L'origine est un point limite lorsque $t \to -\infty$ si $a > 0$, et lorsque $t \to +\infty$ si $a < 0$. Elle n'appartient pas au support.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \gamma(\mathbb{R}) \cup \{O\} \text{ n'est pas une sous-variété.}}$$

Pour le démontrer dans le cas $a > 0$, supposons qu'une carte $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ le redresse en une droite au voisinage de O, avec $\varphi(O) = O$. Posons $h = \varphi_2$; alors h est nulle sur la spirale et en O. Pour $\theta \in \{0, \pi/2\}$, posons

$$t_k = \theta - 2\pi k, \qquad r_k = e^{at_k} \longrightarrow 0.$$

Les points $\gamma(t_k) = r_k(\cos\theta, \sin\theta)$ appartiennent au voisinage pour k assez grand. Par différentiabilité,

$$dh_O(\cos\theta, \sin\theta) = \lim_{k\to\infty} \frac{h(\gamma(t_k)) - h(O)}{r_k} = 0.$$

Avec $\theta = 0$ puis $\theta = \pi/2$, on obtient $dh_O = 0$: la matrice $J\varphi(O)$ ne peut pas être inversible. Le cas $a < 0$ se traite avec $t_k = \theta + 2\pi k$.

Exercice 12. Trouver une paramétrisation locale de la courbe

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$$

au voisinage des points $(0, 0)$ et $(-1, 0)$.

Corrigé

• **Trouver un paramétrage local de C au voisinage de $(0, 0)$ et de $(-1, 0)$.** Posons

$$F(x, y) = x^4 + y^3 - y^2 + x - y, \qquad C = F^{-1}(0).$$

On a

$$\nabla F(x, y) = (4x^3 + 1,\ 3y^2 - 2y - 1), \qquad \operatorname{Hess} F(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 6y - 2 \end{pmatrix}.$$

Rappel du théorème des fonctions implicites. Si $F(x_0, y_0) = 0$ et $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, il existe des intervalles ouverts I, J, contenant respectivement x_0, y_0, et une fonction lisse $\varphi : I \to J$ telle que

$$C \cap (I \times J) = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in I\}, \qquad \varphi(x_0) = y_0.$$

En dérivant $F(x, \varphi(x)) = 0$ par rapport à x, on obtient

$$F_x + F_y\varphi' = 0, \qquad F_{xx} + 2F_{xy}\varphi' + F_{yy}(\varphi')^2 + F_y\varphi'' = 0,$$

où les dérivées de F sont évaluées en $(x, \varphi(x))$. Ainsi

$$\varphi' = -\frac{F_x}{F_y}, \qquad \varphi'' = -\frac{F_{xx} + 2F_{xy}\varphi' + F_{yy}(\varphi')^2}{F_y}.$$

Au voisinage de $(0, 0)$. On a $F(0, 0) = 0$ et $\nabla F(0, 0) = (1, -1)$. Comme $F_y(0, 0) = -1 \neq 0$, le théorème fournit une fonction lisse φ telle que $\varphi(0) = 0$ et $F(x, \varphi(x)) = 0$. On calcule

$$\varphi'(0) = -\frac{1}{-1} = 1, \qquad \varphi''(0) = -\frac{0 + 0 - 2 \cdot 1^2}{-1} = -2.$$

Un paramétrage local exact est $\gamma_0(x) = (x, \varphi(x))$, et son développement limité à l'ordre 2 est

$$\boxed{\gamma_0(x) = \big(x,\ x - x^2 + o(x^2)\big).}$$

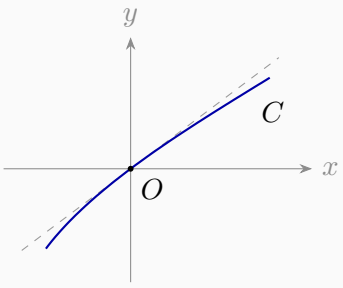
Au voisinage de $(-1, 0)$. On a $F(-1, 0) = 0$ et $\nabla F(-1, 0) = (-3, -1)$. Puisque $F_x(-1, 0) = -3 \neq 0$, on peut cette fois écrire $x = \psi(y)$, avec $\psi(0) = -1$ et $F(\psi(y), y) = 0$. Les formules analogues donnent

$$\psi'(0) = -\frac{F_y(-1, 0)}{F_x(-1, 0)} = -\frac{1}{3},$$

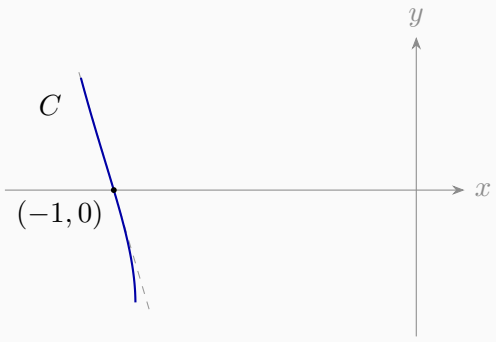
$$\psi''(0) = -\frac{F_{yy} + 2F_{xy}\psi' + F_{xx}(\psi')^2}{F_x}\bigg|_{(-1,0)} = -\frac{-2 + 12 \cdot \frac{1}{9}}{-3} = -\frac{2}{9}.$$

Par conséquent, un paramétrage local exact est $\gamma_{-1}(y) = (\psi(y), y)$, avec

$$\boxed{\gamma_{-1}(y) = \left(-1 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2),\ y\right).}$$



Au voisinage de $(0, 0)$.



Au voisinage de $(-1, 0)$.

Exercice 13. Soit $F(\theta,\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta)$ la paramétrisation en coordonnées sphériques de la sphère $\mathbb{S}^2$, pour $-\pi/2<\theta<\pi/2$ et $0\le\varphi<2\pi$.

a) Montrer que $u=\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ est un changement de paramètre et trouver le nouveau paramétrage $G(u,\varphi)$ de la sphère.

b) Déterminer l'ensemble $G^{-1}(C)$, où C est un méridien ou un parallèle de la sphère.

Corrigé

Rappels sur les coordonnées sphériques. La sphère unité est le niveau zéro de $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$; comme $\nabla f=2(x,y,z)$ ne s'annule pas sur ce niveau, $\mathbb{S}^2$ est une sous-variété lisse de dimension 2.
L'application

$$h(r,\theta,\varphi)=(r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta)$$

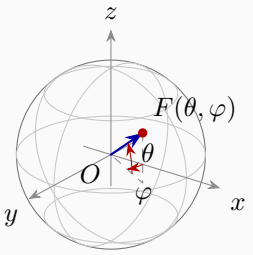
est définie pour $r>0$, $-\pi/2<\theta<\pi/2$ et $0<\varphi<2\pi$. Sa matrice jacobienne est

$$Jh=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\end{pmatrix},$$

dont le déterminant vaut

$$\det Jh=-r^2\cos\theta\neq 0.$$

L'application est bijective sur $\mathbb{R}^3\setminus\{(x,0,z)\mid x\ge 0\}$: le rayon r, la latitude θ et la longitude φ choisie dans $]0,2\pi[$ y sont déterminés de façon unique. Elle est donc un difféomorphisme sur cet ouvert.
Les formules se prolongent aux valeurs $r=0$, $\theta=\pm\pi/2$ ou $\varphi=0$, mais ce prolongement ne constitue plus une carte globale.
Pour $r=1$, on retrouve le paramétrage F de la sphère privée des pôles.



a) • **Montrer que $u=\ln\tan(\theta/2+\pi/4)$ est un changement de paramètre et calculer $g(u,\varphi)$.**
Pour $-\pi/2<\theta<\pi/2$, l'angle $\theta/2+\pi/4$ appartient à $]0,\pi/2[$: sa tangente est strictement positive. La fonction

$$u(\theta)=\ln\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

est donc lisse, et

$$u'(\theta)=\frac{1}{2\sin(\theta/2+\pi/4)\cos(\theta/2+\pi/4)}=\frac{1}{\cos\theta}>0.$$

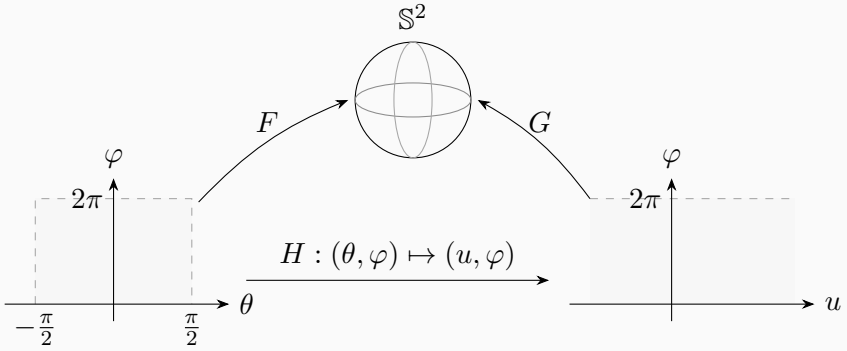
De plus,

$$\lim_{\theta\to-\pi/2}u(\theta)=-\infty,\qquad\lim_{\theta\to\pi/2}u(\theta)=+\infty.$$

Ainsi $\theta\mapsto u(\theta)$ est un difféomorphisme de $]-\pi/2,\pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. En particulier,

$$H(\theta,\varphi)=(u(\theta),\varphi)$$

est un difféomorphisme entre les domaines ouverts $]-\pi/2,\pi/2[\times]0,2\pi[$ et $\mathbb{R}\times]0,2\pi[$. Il ne se prolonge pas à des valeurs réelles finies aux pôles.



Corrigé (suite)

Pour calculer $G = F \circ H^{-1}$, posons $q = \tan(\theta/2)$. Alors

$$e^u = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{q+1}{1-q}, \qquad q = \frac{e^u - 1}{e^u + 1}.$$

Les identités de l'angle moitié donnent

$$\cos\theta = \frac{1-q^2}{1+q^2} = \frac{2e^u}{e^{2u}+1} = \frac{1}{\cosh u},$$

$$\sin\theta = \frac{2q}{1+q^2} = \frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1} = \tanh u.$$

On en déduit

$$\boxed{G(u,\varphi) = \left(\frac{\cos\varphi}{\cosh u},\ \frac{\sin\varphi}{\cosh u},\ \tanh u\right).}$$

Ces formules sont définies pour $u \in \mathbb{R}$ et tout $\varphi \in \mathbb{R}$; elles sont 2π-périodiques en φ. Sur le domaine $0 \leq \varphi < 2\pi$ de l'énoncé, elles décrivent la sphère privée des pôles, mais il faut choisir une coupure en longitude pour obtenir une carte.

Remarque. L'application inverse, sur un domaine avec coupure méridienne, est la projection de Mercator avec les coordonnées ordonnées ici sous la forme (u, φ). On a

$$u = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad z = \tanh u.$$

L'équateur correspond à $u = 0$ et les deux pôles à $u \to \pm\infty$.

b) • **Déterminer $G^{-1}(C)$ lorsque C est un méridien ou un parallèle.** Un **méridien**, entendu comme le demi-grand cercle de longitude φ_0 fixée, est paramétré par

$$\theta \longmapsto f(\theta, \varphi_0), \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Puisque u parcourt tout $\mathbb{R}$, son image réciproque est la droite

$$\boxed{G^{-1}(C_{\varphi_0}) = \mathbb{R} \times \{\varphi_0\}.}$$

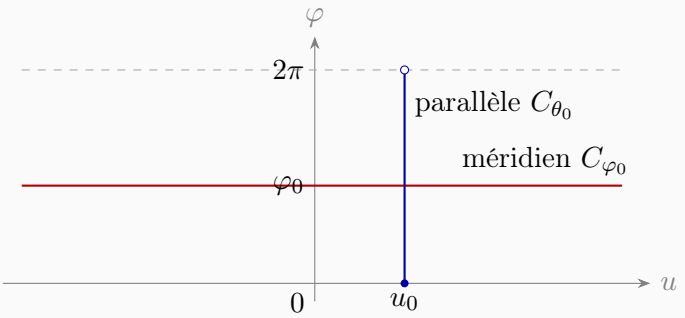
Un **parallèle** de latitude $\theta_0 \in]-\pi/2, \pi/2[$ fixée est paramétré par $\varphi \mapsto f(\theta_0, \varphi)$. Si on pose

$$u_0 = \ln\tan\left(\frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

son image réciproque, dans le domaine de l'énoncé, est le segment

$$\boxed{G^{-1}(C_{\theta_0}) = \{u_0\} \times [0, 2\pi[.}$$

Avec u en abscisse et φ en ordonnée, les méridiens sont donc représentés par des droites horizontales et les parallèles par des segments verticaux. Sur un domaine ouvert avec coupure, on remplace $[0, 2\pi[$ par $]0, 2\pi[$.



Exercice 14.

a) Montrer que le tore de révolution, parametré par

$$F(u,v) = \big((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u\big),$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que, si α est un nombre irrationnel, la courbe paramétrée

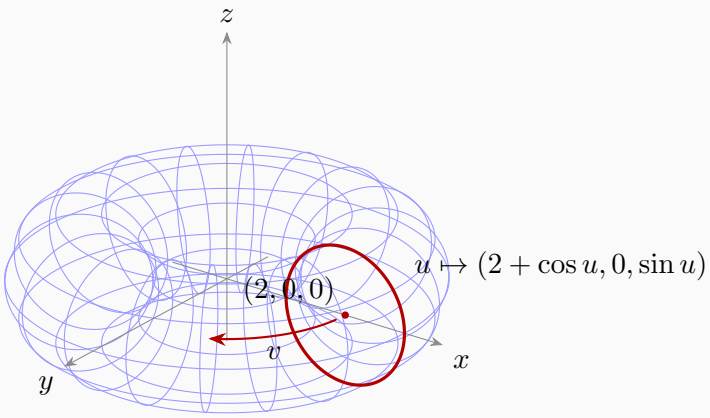
$$\gamma(t) = \big((2+\cos t)\cos(\alpha t), (2+\cos t)\sin(\alpha t), \sin t\big)$$

est partout dense sur le tore, et expliquer pourquoi ce n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé

a) • **Montrer que le tore paramétré par F est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.** Le tore est une surface de révolution autour de Oz : on fait tourner le cercle $u \mapsto (2+\cos u, 0, \sin u)$, de rayon 1 et de centre $(2,0,0)$. En effet,

$$\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\cos u \\ 0 \\ \sin u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\cos u)\cos v \\ (2+\cos u)\sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$



Les deux dérivées partielles sont

$$\partial_u F = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u),$$
$$\partial_v F = (-(2+\cos u)\sin v, (2+\cos u)\cos v, 0).$$

Elles vérifient

$$\langle \partial_u F, \partial_v F\rangle = 0, \qquad \|\partial_u F\| = 1, \qquad \|\partial_v F\| = 2+\cos u \geq 1.$$

Elles sont donc indépendantes en tout point : F est une immersion.

Il reste à justifier la propriété de plongement du tore, et non la seule régularité du paramétrage. Comme F est 2π-périodique dans chaque variable, elle définit une application lisse

$$\overline{F} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \overline{F}\big((\cos u, \sin u), (\cos v, \sin v)\big) = F(u,v).$$

Si $(x,y,z) = F(u,v)$ et $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, alors

$$\rho = 2+\cos u > 0, \qquad (\cos u, \sin u) = (\rho - 2, z),$$
$$(\cos v, \sin v) = \left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}\right).$$

Ces formules déterminent un unique couple de points de $\mathbb{S}^1$ et donnent un inverse continu sur l'image. Ainsi $\overline{F}$ est une immersion injective et un homéomorphisme sur son image : c'est un plongement. Son image T est une sous-variété lisse de dimension 2.

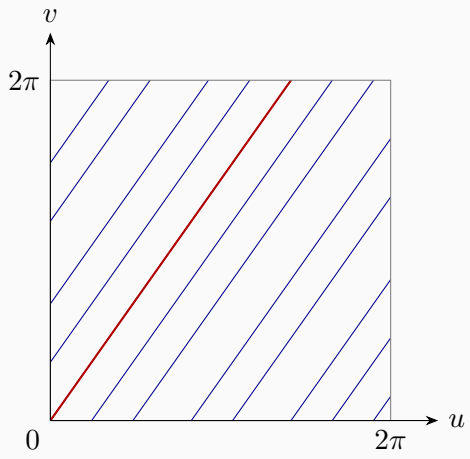
b) • **Pour α irrationnel, montrer que la courbe est dense sur le tore et que son support n'est pas une sous-variété.** On a

$$\gamma(t) = F(t, \alpha t).$$

Corrigé (suite)

Les angles sont pris modulo 2π : dans le plan des paramètres, la droite $v = \alpha u$ donne, après translations par $(2\pi\mathbb{Z})^2$, la famille

$$v = \alpha u + 2\pi(\ell - \alpha k), \qquad k, \ell \in \mathbb{Z}.$$



Quelques branches pour $\alpha = \sqrt{2}$.

Lemme : les multiples d'un irrationnel sont denses modulo 1. Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Pour $N \geq 1$, considérons les parties fractionnaires de

$$0, \alpha, 2\alpha, \ldots, N\alpha$$

dans $[0, 1[$, partagé en N intervalles de longueur $1/N$. Par le principe des tiroirs, deux de ces $N+1$ nombres sont dans le même intervalle. Leur différence fournit des entiers $q \neq 0$ et p tels que

$$0 < |q\alpha - p| < \frac{1}{N}.$$

En changeant éventuellement les signes de q et p, on peut supposer $\delta = q\alpha - p > 0$. Pour tout $x \in [0, 1[$, prenons $j = \lfloor x/\delta \rfloor$. Alors

$$0 \leq j\delta \leq x < j\delta + \delta, \qquad j\delta < 1.$$

Comme $jq\alpha = jp + j\delta$, la partie fractionnaire de $jq\alpha$ est $j\delta$ et sa distance à x est inférieure à $1/N$. Le nombre N étant arbitraire, $\{k\alpha \bmod 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[0, 1[$.

Densité sur le tore. Fixons un point $F(u_0, v_0)$ du tore. Aux temps $t_k = u_0 + 2\pi k$, on a

$$\gamma(t_k) = F(u_0, \alpha u_0 + 2\pi\alpha k).$$

D'après le lemme, les secondes coordonnées angulaires sont denses modulo 2π. On peut donc choisir une suite d'entiers k_j telle que

$$\gamma(t_{k_j}) \longrightarrow F(u_0, v_0).$$

Tout point du tore appartient à l'adhérence du support $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$. Comme le tore est fermé dans $\mathbb{R}^3$, on a bien

$$\boxed{\overline{\Gamma} = T.}$$

Pourquoi Γ n'est-il pas une sous-variété ? La densité, à elle seule, ne suffit pas à conclure : un ouvert dense d'une variété est encore une sous-variété. On utilise ici le fait que Γ n'est pas *localement fermé*.

D'abord, Γ ne contient aucun ouvert non vide de T. En effet, pour une valeur u_0 fixée modulo 2π, les points de Γ situés sur le cercle $\{F(u_0, v) \mid v \in \mathbb{R}\}$ sont exactement

$$\{F(u_0, \alpha u_0 + 2\pi\alpha k) \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

un ensemble dénombrable. Or tout ouvert du tore contenant un point de ce cercle en contient un arc non vide, donc un ensemble non dénombrable de points.

Supposons maintenant que Γ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Une carte redressante autour d'un point $p \in \Gamma$ fournirait un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\Gamma \cap U$ soit fermé dans U : dans les coordonnées de cette

Corrigé (suite)

carte, c'est l'intersection d'un ouvert avec un sous-espace vectoriel fermé. Mais Γ est dense dans T, donc

$$\overline{\Gamma \cap U}^{U} = T \cap U.$$

La fermeture relative de $\Gamma \cap U$ imposerait ainsi $\Gamma \cap U = T \cap U$: Γ contiendrait un ouvert non vide du tore, ce qui vient d'être exclu. Par conséquent,

$$\boxed{\gamma(\mathbb{R}) \text{ n'est pas une sous-variété de } \mathbb{R}^3.}$$

Exercices facultatifs de topologie générale

Exercice 15 (Restriction d'applications continues)**.** Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $f : X \to Y$ une application continue.

Montrer que si A est une partie de X, alors la restriction $f|_A : A \to Y$ est aussi continue.

Corrigé

• **Montrer que la restriction $f|_A : A \to Y$ est continue.** On munit A de la **topologie induite** par celle de X : les ouverts de A sont les ensembles de la forme $A \cap U$, où U est un ouvert de X.
Soit V un ouvert de Y. Par définition de la restriction,

$$(f|_A)^{-1}(V) = \{a \in A \mid f(a) \in V\} = A \cap f^{-1}(V).$$

L'application f étant continue, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X. Son intersection avec A est donc un ouvert de A pour la topologie induite. L'image réciproque de tout ouvert de Y par $f|_A$ est ainsi ouverte dans A, ce qui prouve que

$$\boxed{f|_A : A \longrightarrow Y \text{ est continue.}}$$

Remarque. Il n'est pas nécessaire que A soit ouvert ou fermé dans X. L'ensemble $(f|_A)^{-1}(V)$ doit être ouvert *dans* A, mais pas nécessairement dans X.

Exercice 16 (Recollement d'applications continues)**.** Soient X et Y deux espaces topologiques, $A, B \subset X$ deux parties fermées et

$$f\colon A \to Y \quad \text{et} \quad g\colon B \to Y$$

deux applications continues telles que

$$f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}\ .$$

a) Montrer qu'il existe une unique application $F\colon A \cup B \to Y$ telle que

$$F|_A = f \quad \text{et} \quad F|_B = g\ ,$$

et que F est continue.

b) L'hypothèse que A et B sont fermés est essentielle. Chercher un contre-exemple avec $X = Y = \mathbb{R}$, pour $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ouvert et $B = \{0\}$ fermé.

Corrigé

On munit A, B et $A \cup B$ des topologies induites par celle de X.

a) **Montrer l'existence et l'unicité du recollement, puis sa continuité.**

• **Existence.** Pour $x \in A \cup B$, posons

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & x \in B. \end{cases}$$

Cette définition est cohérente : si $x \in A \cap B$, l'hypothèse $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$ donne $f(x) = g(x)$. On a donc bien $F|_A = f$ et $F|_B = g$.

Corrigé (suite)

• **Unicité.** Toute application vérifiant ces deux restrictions doit prendre la valeur $f(x)$ sur A et la valeur $g(x)$ sur B. Comme tout point de $A \cup B$ appartient à l'un au moins de ces deux ensembles, sa valeur est entièrement déterminée. Le recollement F est donc unique.

• **Continuité.** Utilisons la caractérisation de la continuité par les images réciproques des *fermés*. Soit K un fermé de Y. On a

$$F^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cup g^{-1}(K).$$

Par continuité de f et de g, l'ensemble $f^{-1}(K)$ est fermé dans A et l'ensemble $g^{-1}(K)$ est fermé dans B. Comme A et B sont eux-mêmes fermés dans X, ces deux ensembles sont fermés dans X.

En effet, un fermé relatif de A s'écrit $A \cap P$, où P est un fermé de X ; si A est fermé dans X, alors $A \cap P$ l'est aussi. Le même raisonnement s'applique à B. Ainsi $F^{-1}(K)$, réunion de deux fermés de X, est fermé dans X, donc dans $A \cup B$. On conclut que

$$\boxed{F : A \cup B \longrightarrow Y \text{ est continue.}}$$

b) • **Donner un contre-exemple avec $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $B = \{0\}$.** Prenons $X = Y = \mathbb{R}$, munis de leurs topologies usuelles, et définissons

$$f : A \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 1, \qquad \text{et} \qquad g : B \to \mathbb{R}, \qquad g(0) = 0.$$

Les deux applications sont constantes, donc continues. Comme $A \cap B = \varnothing$, la condition d'accord sur l'intersection est automatiquement satisfaite. Leur unique recollement est

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Cette application n'est pas continue en 0. Par exemple, l'intervalle $]-1/2, 1/2[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$, mais

$$F^{-1}\left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\right) = \{0\}$$

n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, sans l'hypothèse que les deux parties sont fermées, la continuité des restrictions et leur accord sur l'intersection ne suffisent pas à garantir la continuité du recollement.