
Partiel – 22 Octobre 2025 – durée 2h

Question 1. Soit $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité et soit f la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{|x^2 + y^2 - 1|}.$$

Quelle est la régularité de la restriction $f|_{\mathbb{S}^1}$? Justifier la réponse.

Exercice 1. La **deltoïde** est la courbe plane paramétrée par

$$\gamma(t) = (2 \cos t + \cos(2t), 2 \sin t - \sin(2t)) = 2e^{it} + e^{-2ti}, \quad t \in [0, 2\pi[.$$

On rappelle les formules trigonométriques utiles dans cet exercice :

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2).$$

1. Montrer que le support de γ est invariant par la rotation d'angle $2\pi/3$, notée $R_{2\pi/3}$, i.e. que pour tout $t \in [0, 2\pi[$ on a $R_{2\pi/3}\gamma(t) = \gamma(t')$ pour un $t' \in [0, 2\pi[$. [*Conseil : utiliser la forme complexe de $\gamma(t)$ et $R_{2\pi/3} = e^{2\pi i/3}$.*]
2. Trouver les points singuliers et les étudier avec un D.L., puis dessiner la deltoïde.
3. Calculer la courbure.
4. Calculer une abscisse curviligne $s(t)$ sur l'intervalle $]0, 2\pi/3[$, puis la longueur de la courbe sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.
5. En utilisant le théorème de Green-Riemann, calculer l'aire du domaine D entouré par γ et vérifier l'inégalité isopérimétrique.

Exercice 2. Considérons l'ensemble des **matrices unitaires complexes**

$$U(2) = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) \mid A^* A = \mathbf{1}_2\},$$

où A^* est la conjuguée et transposée de la matrice A . Soit F l'application

$$F: \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbb{C}), A \mapsto A^* A,$$

où l'on rappelle que l'espace de matrices carrées complexes $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathbb{C}^{n^2}$ comme espace vectoriel complexe, et à $\mathbb{R}^{2n^2}$ comme espace vectoriel réel.

1. Calculer la différentielle de F . La différentielle est-elle linéaire sur $\mathbb{C}$? Est-elle linéaire sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que $\mathbf{1}_2$ n'est pas une valeur régulière de F . Quelles conclusions pourrions-nous tirer sur $U(2)$ si $\mathbf{1}_2$ en était une ?
3. Montrer que $U(2)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^8$. Quelle est sa dimension (avec justification) ?