CONTRÔLE CONTINU DE MATH 2

Jeudi 6 novembre 2008. Durée de l'épreuve : 45 minutes

Il est interdit d'utiliser des calculatrices et de consulter des notes personnelles ou des livres. Les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1 Soit $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie, en coordonnées cartésiennes, par

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ x \end{pmatrix}.$$

Ecrire la matrice A associée à L et calculer son déterminant $\det A$.

Exercice 2 On considère la fonction réelle de deux variables définie par

$$f(x,y) = \sqrt{9-4x^2-y^2}$$

sur l'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9-4x^2-y^2 \geq 0\}$.

1. Quelles courbes sont les lignes de niveau 0, 1 et 3 de f ? Les représenter dans D.
2. Quelles courbes sont les fonctions partielles de f pour $x=0$ et $y=0$? Les représenter respectivement dans le plan yOz et dans le plan xOz.
3. Dessiner sommairement le graphe de f dans $\mathbb{R}^3$, en utilisant les lignes de niveau et les fonctions partielles trouvées précédemment.

Exercice 3 On considère la fonction réelle de deux variables définie par

$$f(x,y) = \frac{\sin x}{y},$$

sur l'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 2\pi], y > 0\}$.

1. Calculer le gradient de f en un point $(x,y) \in D$.
2. Ecrire l'approximation au 1er ordre de $f(x,y)$ autour du point $(\frac{\pi}{2}, 1)$.
3. Calculer la matrice hessienne de f en un point $(x,y) \in D$.

Exercice 4 Calculer les dérivées partielles par rapport à u et v de la fonction

$$f(x,y) = y\ \mathrm{sh}(x), \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} x = u^2+v^2 \\ y = uv \end{cases},$$

sans calculer la fonction composée.