Université Claude Bernard (Lyon 1) Année 2008-2009
UE Math2 **Fiche 1**

Calcul vectoriel et matriciel

Exercice 1 L'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les vecteurs $\vec{u}=(1/2)\vec{i}+(\sqrt{3}/2)\vec{k}$, $\vec{v}=(\sqrt{3}/2)\vec{i}-(1/2)\vec{k}$ et $\vec{w}=-\vec{j}$.

1. Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
2. Comparer le produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ avec le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer et dessiner l'ensemble des points $M\in\mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M\in\mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$.
   (<u>Indication</u> : introduire le point I milieu de $[AB]$.)
3. Considérer le mêmes questions dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 [Facultatif] Calculer l'aire du parallélogramme de sommets $A=(1,2,1)$, $B=(2,4,2)$, $C=(2,3,1)$ et $D=(3,5,2)$.

Exercice 4 Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M\in\mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M\in\mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

Exercice 5 [Facultatif] On considère dans un repère orthonormé les trois points $P_1\equiv(1,1,1)$, $P_2\equiv(1,2,3)$ et $P_3\equiv(0,0,2)$. Calculer le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs $\vec{u}=\vec{OP_1}$, $\vec{v}=\vec{OP_2}$ et $\vec{w}=\vec{OP_3}$.

Exercice 6 On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\; B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\; C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\; D=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\; E=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles ? En calculer au moins cinq.

Exercice 7 Déterminer si les applications suivantes sont linéaires et justifier la reponse :

1. $f : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(2x+3y, 3x-5y)$;
2. $g : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $(x,y,z)\mapsto(x+2y+1, z, y-z^2-x)$;
3. $h : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $(x,y)\mapsto(3x+2y, x, |x|)$.

Exercice 8 Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y=0$ et soit $p:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'application qui associe à un point u de $\mathbb{R}^3$ sa projection orthogonale $p(u)$ sur le plan P. Est-ce que l'application p est linéaire ? Même question si on remplace le plan P par

- la droite D d'équations $x=y=0$;
- la droite D' d'équations $x=y=1$.

Exercice 9 Soient $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $L' : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ les deux applications linéaires définies, en coordonnées cartésiennes, par

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -y \\ x-2y \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad L'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ 2y \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les applications composées $L' \circ L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $L \circ L' : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
2. Trouver les matrices A et A' associées respectivement à L et à L'. Vérifier que les produits $A'A$ et AA' correspondent respectivement aux composées $L' \circ L$ et $L \circ L'$.

Exercice 10 Soit $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie, en coordonnées cartésiennes, par

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice A associée à L, et son déterminant $\det A$.
2. Est-ce que la matrice A est inversible ? Si elle l'est, calculer son inverse A^{-1}.
3. Calculer la réciproque L^{-1} de l'application linéaire L.

Coniques

Exercice 11 Déterminer la nature de la conique $(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 9$, ainsi que ses axes de symétrie.

Exercice 12 Notons C le cône d'équation $x^2 - y^2 - z^2 = 0$. Décrire sont intersection avec le plan d'équation $z = 1$.

Exercice 13 Déterminer les asymptotes de l'hyperbole d'équation $x^2 - 4y^2 = 1$.