Université Claude Bernard (Lyon 1) — Année 2008-2009

UE Math2 — **Fiche 4**

Extrema

Exercice 1

1. Etudier les extrema relatifs (locaux) de $f(x, y) = x^2+xy+y^2+2x+3y$. Admet-elle des extrema absolus (globaux) ?
2. Même question pour

(a)	$f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$	(b)	$f(x,y) = xe^y + ye^x$
(c)	$f(x,y) = (3x+4y)e^{-(x^2+y^2)}$	(d)	$f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3$
(e)	$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$	(f)	$f(x,y) = x^3 + 3xy - y^2 + y + 1$

Exercice 2 *Epreuve de Novembre 2003.* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. Déterminer les extrema relatifs (locaux) de la fonction f.
2. La fonction f possède-t-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$?
3. Représenter le segment de droite L défini par

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -2 \leq x \leq 0,\ y = x + 1\}.$$

   Déterminer les extrema absolus de la restriction de f à L et préciser en quels points de L ils sont atteints.

Exercice 3 *Epreuve de Mai 2001.* On considère la fonction

$$f(x, y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

1. Etudier les extréma relatifs (locaux) de f sur $\mathbb{R}^2$. *Suggestion :* on pourra utiliser les symétries de la fonction $f(x, y)$ pour réduire le nombre de cas à étudier.
2. Démontrer que $f(x, y) \to 0$ quand $(x, y) \to \infty$.
3. Déduire de ce qui précède l'existence des extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les extréma globaux.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. f possède-t-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$?
3. Représenter $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$.
   Justifier l'existence d'un maximum absolu M et d'un minimum absolu m pour la restriction de f à T. Les déterminer.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. Montrer que $f(x, y) \leq 2r^2 - \dfrac{r^4}{4}$ où $r^2 = x^2 + y^2$. En déduire que $f(x, y) \leq 4$.
3. Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.
4. Y a-t-il un minimum global ?

Exercice 6 On considère la fonction

$$f(x,y) = 1 + (x + \sqrt{2}y)^2 + ax^4 \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Déterminer les valeurs du paramètre a telles que l'origine soit (i) un point de col (ii) un point de minimum local.

Exercice 7 Ecrire les formules de Taylor d'ordre 2 pour $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2+\frac{4}{3}z^3+xy-2x-y+1$, centrées aux points critiques de f. Déterminer ensuite la nature de ces points.

Exercice 8 Etudier la nature des points critiques des fonctions définies par

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z, \\ g(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + 2x - 2y - 4z + 5, \\ h(x,y,z) &= 2x^2y - y^2 - x^4 - z^2. \end{aligned}$$