

**Champs de vecteurs**

**Exercice 1** Pour quelle fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la divergence de  $\vec{V} = xz \vec{i} + y \vec{j} + f(z) \vec{k}$  est-elle égale à  $z$  ?

**Exercice 2** A tout point  $M = (x, y)$  de  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , on associe le vecteur unitaire  $\vec{u}(x, y) = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$ . En posant  $\rho = \|\vec{OM}\|$ , montrer que la divergence du champ de vecteurs  $\vec{u}(x, y)$  est égale à  $1/\rho$ .

**Exercice 3** Pour un champ de vecteurs  $\vec{B} = xy^2 \vec{i} + 2x^2yz \vec{j} + 3yz^2 \vec{k}$ , trouver  $\text{div} \vec{B}$  et  $\text{rot} \vec{B}$ .

**Exercice 4** Déterminer si les champs suivants sont des champs de gradients, si oui déterminer leurs potentiels scalaires.

1.  $\vec{V}(x, y) = (y, x)$
2.  $\vec{V}(x, y) = (3x^2y + 2x + y^3, x^3 + 3xy^2 - 2y)$
3.  $\vec{V}(x, y) = (\cos(x), \sin(y))$
4.  $\vec{V}(x, y) = (y + \frac{1}{x}, x + \frac{1}{y})$
5.  $\vec{V}(x, y) = (x + y, x - y)$
6.  $\vec{V}(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$

**Exercice 5** Un *champ central* dans  $\mathbb{R}^3$  est donné par  $\vec{V}(x_1, x_2, x_3) = f(r) \vec{x}$  où  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ ,  $\vec{x} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}$ , et  $f$  est une application dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradients et calculer son potentiel.

*Solutions de l'exercice 4*

1.  $f(x, y) = xy + c$
2.  $f(x, y) = x^3y + x^2 - y^2 + xy^3 + c$
3.  $f(x, y) = \sin x - \cos x + c$
4.  $f(x, y) = xy + \ln x + \ln y + c$
5.  $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + c$
6.  $f(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz + c$