Intégrales multiples

Intégrales doubles

Exercice 1 Calculer l'intégrale

$$\int\int_D xy \; dx\, dy$$

où $D = [0,1] \times [0,1]$.

Exercice 2 Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x, \quad y^2 = x.$$

Exercice 3

a) Calculer $\displaystyle\int\int_D (x-y) \; dx\, dy$ où D est la partie du plan délimitée par les droites d'équation :

$$x = 0, \quad y = x+2, \quad y = -x.$$

b) Calculer la même intégrale au moyen du changement de variables défini par :

$$u = x + y, \qquad v = x - y.$$

Exercice 4 Soit D le quart de disque unité défini par :

$$D = \{(x,y) | \quad 0 \le x,\ 0 \le y,\ x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Utiliser le passage en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale :

$$\int\int_D (4 - x^2 - y^2) \; dx\, dy.$$

Exercice 5 Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène.

Exercice 6 Trouver le centre de gravité de la surface plane homogène délimitée par la parabole $y = 6x - x^2$ et la droite $y = x$.

Exercice 7

a) Calculer l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{y^2}{2} \le x \le 2\}$.

b) Calculer l'intégrale

$$\int\int_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \; dx\, dy.$$

Intégrales triples

Exercice 8 Calculer la masse totale du cube $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^3$ ayant densité volumique $\mu(x,y,z) = x^2y + xz^2$. Calculer ensuite le centre d'inertie de D.

Exercice 9 Calculer le volume de la boule de rayon 1 de $\mathbb{R}^3$.