(9) Géométrie du plan et de l'espace

INTRO : en physique : masse, charge = nombres $\longrightarrow$ scalaires
forces = nombres + directions + sense $\longrightarrow$ vecteurs.

1) Vecteurs du plan et de l'espace

Plan ou espace = ensemble de des points $P, Q, M, A, \ldots$

Déf
- vecteur = flèche $P \xrightarrow{\vec{v}} Q$ $= \vec{PQ} \equiv \vec{v}$ (si on oublie P)
- ensemble des vecteurs : Vect, ou Vect(2) ou Vect(3)
- module ou norme $|\vec{PQ}| = |\vec{v}| = \text{dist}(P,Q) \in \mathbb{R}$
- angle $\widehat{\vec{v}\vec{v}'} = \alpha$ t.q.
- vecteurs parallèles ou colinéaires $\vec{v} \,//\, \vec{v}'$ si $\iff \sin(\widehat{vv'}) = 0$
- vecteurs orthogonaux ou perpendiculaires $\vec{v} \perp \vec{v}'$ si $\iff \cos(\widehat{vv'}) = 0$

Déf
- somme $\vec{v} + \vec{v}'$ = vecteur diagonale du parallélogramme de côtés $\vec{v}$ et $\vec{v}'$: $v + v'$
- produit par scalaire : si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \vec{v}$ = vecteur avec même dir. que $\vec{v}$ et module $|\lambda \vec{v}| = \lambda |\vec{v}|$

  $\vec{v}$ $\;\; 3\vec{v}$

Déf
- combinaison linéaire de $\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}'', \ldots$ = vecteur $\lambda\vec{v} + \lambda'\vec{v}' + \cdots$ avec $\lambda, \lambda', \ldots \in \mathbb{R}$
- $v, v', v'', \ldots$ sont linéairement indépendant si aucun vecteur n'est comb. lin. des autres.

  ssi $\lambda v + \lambda' v' + \cdots = 0 \iff \lambda = \lambda' = \cdots = 0$.

  ex. v, v' sont lin. indep. , v, v' sont lin. dep, car $\vec{v}' = 2\vec{v}$.

Déf : produit scalaire • Vect $\times$ Vect $\longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{v} \cdot \vec{v}' = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}'| \cdot \cos(\widehat{vv'}) \in \mathbb{R}$

Propriétés :
- $\vec{v} \cdot \vec{v}' = v' \cdot v$ (symmétrique)
- $(\lambda \vec{v}) \cdot \vec{v}' = \lambda(\vec{v} \cdot \vec{v}') = \vec{v} \cdot (\lambda \vec{v}')$
- $(\vec{v} + \vec{u}) \cdot v' = \vec{v} \cdot v' + \vec{u} \cdot v'$

$\Big\} \Rightarrow (\lambda v + \mu u) \cdot (\lambda' v' + \mu' u') = \cdots$ (bilinéaire)

Prop
1) $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$
2) $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{u}$ (car $\cos(\widehat{vu}) = 0$)

Déf
- Projection orthogonale de $\vec{v}$ dans la dir. de $\vec{u}$ (sur la droite de dir. $\vec{u}$) :

  $Pr_{\vec{u}}(\vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u}$ si $|u| = 1$, sinon : $\dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\, \vec{u}$
- Si $v \in$ Vect(3), projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan contenant $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

  $Pr_{\vec{u}_1, \vec{u}_2}(\vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_2$ si $|u_1| = |u_2| = 1$, sinon ...

Dans Vect(3) :

Déf : produit vectoriel $\wedge$: Vect(3) $\times$ Vect(3) $\longrightarrow$ Vect(3), $\vec{v} \wedge \vec{v}'$ = vecteur de dir
et module $= |\vec{v}||\vec{v}'| \sin(\widehat{vv'})$

Propriétés :
- $\vec{v} \wedge \vec{v}' = -\vec{v}' \wedge \vec{v}$ (antisymmétrique)
- $(\lambda \vec{v}) \wedge \vec{v}' = \lambda(\vec{v} \wedge \vec{v}') = \vec{v} \wedge (\lambda \vec{v}')$
- $(\vec{v} + \vec{u}) \wedge \vec{v}' = \vec{v} \wedge \vec{v}' + \vec{u} \wedge \vec{v}'$

$\Big\} \Rightarrow (\lambda \vec{v} + \mu \vec{u}) \wedge (\lambda' \vec{v}' + \mu' \vec{u}') = \cdots$ (bilin.)

Prop $\vec{v} \wedge \vec{u} = 0 \iff \vec{v} \,//\, \vec{u}$ (car $\sin(\widehat{vu}) = 0$)

Déf Produit mixte : $Vect(3) \times Vect(3) \times Vect(3) \longrightarrow \mathbb{R}$, $[\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}''] = \vec{v} \cdot (\vec{v}' \wedge \vec{v}'') = (\vec{v} \wedge \vec{v}') \cdot \vec{v}''$

Propriétés :
- symétrie mixte. $[v, v', v''] = [v', v'', v] = [v'', v, v'] = -[v', v, v''] = -[v'', v', v] = -[v, v'', v']$
- $[\lambda v, v', v''] = [v, \lambda v', v''] = [v, v', \lambda v''] = \lambda [v, v', v'']$
- $[v+u, v', v''] = [v, v', v''] + [u, v', v'']$

$\Big\}$ 3-linéaire

Prop :
1) $[\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}''] = 0 \iff \vec{v}, \vec{v}', \vec{v}'' \in$ plan
2) $\big|[v, v', v'']\big|$ = volume du parallélépipède de côtés $\vec{v}, \vec{v}'$ et $\vec{v}''$

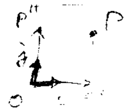
2) Le plan comme espace vectoriel

Déf : Repère orthonormé ou cartésien du plan $= (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

O : point fixé ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$: vect. l.in. indép. (orth.) unitaires

$\begin{cases} \vec{\imath} \perp \vec{\jmath} \\ |\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = 1 \\ \text{sens } \vec{\imath}\,\vec{\jmath} \end{cases}$

Prop :
1) Tout point P = vecteur $\vec{OP}$ = comb. l.in. de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$



$\vec{OP} = |\vec{OP'}|\vec{\imath} + |\vec{OP''}|\vec{\jmath}$

2) Tout vecteur $\vec{PQ}$ aussi : $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$

$\Rightarrow$ 3) (Plan + repère o.n.) $= \mathbb{R}^2$: $P = \vec{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = (x, y) \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Déf
- coordonnées cartésiennes de $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $\vec{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$
- coordonnées polaires où $P = (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ t.q. $\rho = |\vec{OP}|$, $x + iy = \rho e^{i\theta}$ $(i^2 = -1)$

Expressions analytiques ou cartésiennes des opérations entre vecteurs du plan :

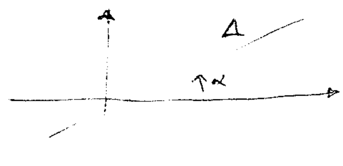
Soient $\vec{OP} = \vec{v} = (x, y)$, $\vec{OP'} = \vec{v}' = (x', y')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
- $\vec{v} + \vec{v}' = (x + x', y + y')$
- $\lambda \vec{v} = (\lambda x, \lambda y)$
- $\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy' \in \mathbb{R}$ ex : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 + 6 = 4$
- $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\vec{v} \perp \vec{v}' \iff xx' + yy' = 0$ ex : $(1, 2) \perp (-2, 1)$
- $\vec{v} \,//\, \vec{v}' \iff \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases} \iff \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$ ex $(1, 2) \,//\, (3, 6)$
- si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, alors $Pr_{\vec{u}}(\vec{v}) = \dfrac{xu_1 + yu_2}{u_1^2 + u_2^2}\,\vec{u}$. ex : $Pr_{\vec{\imath}}(\vec{v}) = \dfrac{x \cdot 1 + y \cdot 0}{1}\,\vec{\imath} = x\vec{\imath}$.

Equations cartésienne d'une droite du plan :

droite $\Delta = \{ P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } ax + by + c = 0 \}$ où $(a, b) \neq (0, 0)$.

si $b \neq 0$, alors $y = (-\frac{a}{b})x + (-\frac{c}{b}) = mx + p$

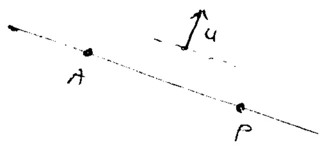
m : pente $= \operatorname{tg} \alpha$



si $a \neq 0$, alors $x = (-\frac{b}{a})y + (-\frac{c}{a})$.

vecteur directeur de $\Delta = (b, -a)$

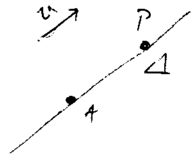
vecteur orthogonal à $\Delta = (a, b)$



Droite passant par $A=(a_1,a_2)$ et $\perp$ $\vec{u}=(u_1,u_2)$: $\vec{AP}\cdot\vec{u}=0$

$\Delta = \{ (x,y)$ t.q. $u_1(x-a_1)+u_2(y-a_2)=0 \}$

$u_1x+u_2y-(u_1a_1+u_2a_2)=0$

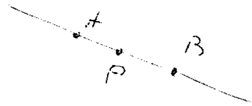


Droite passant par A et $//$ $\vec{v}=(v_1,v_2)$: $\vec{AP} \,//\, \vec{v}$

$\Delta = \{ (x,y)=\vec{OP}$ t.q. $\vec{OP}=\vec{OA}+\lambda\vec{v}$, $\lambda\in\mathbb{R} \}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=a_1+\lambda v_1 \\ y=a_2+\lambda v_2 \end{cases}$ eq. paramétrique

$\Delta = \{ (x,y)$ t.q. $\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2} \}$ eq. cartésienne

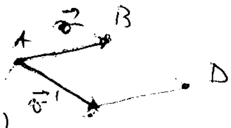


Droite passant par A & B : $\vec{AP} \,//\, \vec{AB}$

$\Delta = \{ (x,y)$ t.q. $\dfrac{x-a_1}{b_1-a_1}=\dfrac{y-a_2}{b_2-a_2} \}$

Distances : $\text{dist}(P,P') = |\vec{PP'}| = |\vec{OP'}-\vec{OP}| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$

$\text{dist}(P,\Delta) = \text{dist}(P,P') = \dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



Aire du parallélogramme de sommets A,B,C,D :

$\vec{AB}=\vec{v}=(x,y)$, $\vec{AC}=\vec{v}'=(x',y')$

$\vec{AC}^{\perp}=(-y',x')$

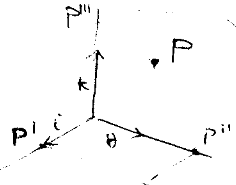
Aire $= |xy'-yx'| = \vec{AB}\cdot(\vec{AC})^{\perp}$

3) L'espace à 3-dim. comme espace vectoriel

Déf. repère orthonormal direct de l'espace $= (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

point fixé ↳ vect. unitaires lin indep. $\perp$

$\begin{cases} \vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k} \\ |\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1 \\ (\vec{i},\vec{j},\vec{k}) = (\text{pouce, index, majeur}) \end{cases}$ main droite



Prop : 1) Tout point P = vecteur $\vec{OP}$ = comb. lin. de $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$:

$\vec{OP} = |\vec{OP'}|\,\vec{i} + |\vec{OP''}|\,\vec{j} + |\vec{OP'''}|\,\vec{k}$

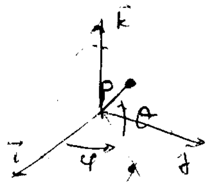
2) Tout vecteur $\vec{PQ}$ aussi : $\vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}$

$\Rightarrow$ 3) (Espace + repère o.n.) $= \mathbb{R}^3$: $P=\vec{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x,y,z)=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

Déf • coordonnées cartésiennes de $P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ t.q. $\vec{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

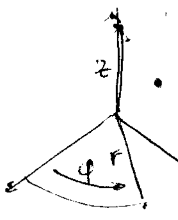
• coordonnées sphériques de $P=(\rho,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi/2,\pi/2]\times[0,2\pi[$ t.q.

$\begin{cases} x=\rho\cos\theta\cos\varphi \\ y=\rho\cos\theta\sin\varphi \\ z=\rho\sin\theta \end{cases}$



• coordonnées cylindriques de $P=(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}$ t.q.

$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$



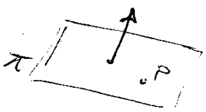
Expressions analytiques des opérations entre vecteurs de l'espace

- $\vec{v} + \vec{v}' = (x+x', y+y', z+z')$
- $\lambda \vec{v} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$
- $\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy' + zz' \in \mathbb{R}$ ex : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = -2+6-5 = -1$
- $|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- $v \perp v' \iff xx' + yy' + zz' = 0$ ex : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$
- $\vec{v} \wedge \vec{v}' = (yz'-zy', -(xz'-zx'), xy'-yx')$ ex : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\vec{v} \,/\!/\, \vec{v}' \iff \begin{cases} xy' = yx' \\ yz' = zy' \\ xz' = zx' \end{cases} \iff \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'} = \dfrac{z}{z'}$
- $[\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}''] = x(y'z''-z'y'') - y(x'z''-z'x'') + z(x'y''-y'x'')$ ex $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = -5+2-3 = -6$
- vol. parall. coté $\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}'' = |[v, v', v'']|$ ex vol. $= |-6| = 6$
- si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ alors $Pr_{\vec{u}}(\vec{v}) = \dfrac{xu_1 + yu_2 + zu_3}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \vec{u}$ ex : $Pr_{\vec{i}+\vec{j}}(\vec{v}) = \left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot (\vec{i}+\vec{j})$
- si $\vec{u}, \vec{u}'$, alors $Pr_{\vec{u},\vec{u}'}(\vec{v}) = \dfrac{xu_1+yu_2+zu_3}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \vec{u} + \dfrac{xu_1'+yu_2'+zu_3'}{u_1'^2+u_2'^2+u_3'^2} \vec{u}'$

  [illegible]

Equation cartésienne d'un plan :

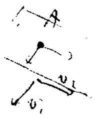
Plan $\pi = \{ P = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $ax+by+cz+d = 0 \}$ où $(a,b,c) \neq (0,0,0)$



vecteur normal à $\pi = (a,b,c)$

Plan $\ni A = (a_1, a_2, a_3)$ et $\perp \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$: $\vec{AP} \perp \vec{u} \iff \vec{AP} \cdot \vec{u} = 0$

$\pi : \{ (x,y,z)$ t.q $u_1(x-a_1) + u_2(x-a_2) + u_3(x-a_3) = 0 \}$



Plan $\ni A$ et $/\!/ \ \vec{v}$ et $\vec{v}'$: $[\vec{AP}, \vec{v}, \vec{v}'] = 0 \iff \vec{AP} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{v}'$

$\pi = \left\{ (x,y,z) \text{ t.q. } \begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 + \mu v_1' \\ y = a_2 + \lambda v_2 + \mu v_2' \\ z = a_3 + \lambda v_3 + \mu v_3' \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.q. } \begin{matrix} (x-a_1)(v_2 v_3' - v_3 v_2') \\ -(y-a_2)(v_1 v_3' - v_3 v_1') \\ +(z-a_3)(v_1 v_2' - v_2 v_1') \end{matrix} = 0 \right\}$

éq. param.

Plan $\ni A, B, C$: $[\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}] = 0$: π comme ↑ avec $\vec{v} = \vec{AB}$, $\vec{v}' = \vec{AC}$.

$\text{dist}(P, \pi) = \dfrac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Equation cartésienne d'une droite :

droite $\Delta = \pi \cap \pi' = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \begin{matrix} ax+by+cz+d = 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' = 0 \end{matrix} \right\}$ où $(a,b,c) \neq \lambda(a',b',c') \neq 0$

droite $\ni A$ et $/\!/ \ \vec{v}$ $\quad \Delta = \left\{ (x,y,z) \text{ t.q. } \begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \dfrac{x-a_1}{v_1} = \dfrac{y-a_2}{v_2} = \dfrac{z-a_3}{v_3} \right\}$

$\vec{AP} /\!/ \vec{v}$

droite $\ni A$ et B : $\Delta =$ comme ↗ avec $\vec{AB} = \vec{v}$.

$\text{dist}(P, \Delta) =$?

volume du parallélépipède de côtés $\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}'' = |[\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}'']|$.