Géométrie du plan et de l'espace

Dans tous les exercises suivants, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et l'espace ambient est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 1 (Changement de coordonnées)

1. Exprimer en coordonnées polaires le point du plan donné en coordonnées cartesiennes par $P = (\sqrt{3}, 1)$.
2. Exprimer en coordonnées cylindriques et sphériques le point de l'espace donné en coordonnées cartesiennes par $Q = (1, 1, 1)$.

Exercice 2 (Droites du plan)
Dans le plan en coordonnées cartesiennes, on considère les deux points $A = (1, 3)$ et $B = (-1, 0)$. Déterminer :

1. l'équation de la droite Δ passant par A et B ;
2. l'équation de la droite parallèle à Δ passant par O ;
3. l'équation de la droite orthogonale à Δ passant par O.

Exercice 3 (Droites du plan)
Dans le plan en coordonnées cartesiennes, on considère le point $A = (5, 3)$ et la droite Δ d'équation $x - y + 1 = 0$. Déterminer :

1. l'équation de la droite parallèle à Δ passant par A ;
2. l'équation de la droite perpendiculaire à Δ passant par A.

Exercice 4 (Coniques du plan)
Décrire et dessiner les coniques suivantes, ainsi que leurs axes de symétrie ou leurs asymptotes :

1. $(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 9$,
2. $x^2 - 4y^2 = 1$,
3. $x = (y-1)^2 + 1$,
4. intersection du cône d'équation $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ avec le plan d'équation $z = 1$.

Exercice 5 (Plans de l'espace)
Dans l'espace en coordonnées cartesiennes, on considère le point $A = (1, 2, 3)$. Ecrire l'équation du plan

1. passant par A et orthogonal au vecteur $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$;
2. passant par A et parallèle au plan $3x - 2y + 4z - 5 = 0$;
3. passant par A, $B = (3, -2, 1)$ et $C = (5, 0, -4)$.

Exercice 6 (Plans de l'espace)
Dans l'espace en coordonnées cartesiennes, on donne les trois points $A = (0, 1, 2)$, $B = (-1, 0, 1)$ et $C = (1, 1, 0)$. Déterminer :

1. l'équation du plan π passant par les points A, B, C et l'intersection de π avec les trois axes ;
2. l'équation paramétrique de la droite Δ passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{BC}$, et l'intersection $\pi \cap \Delta$.

Exercice 7 [Facultatif] Soient A et B deux points du plan.

1. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.
   (Indication : introduire le point I milieu de $[AB]$.)
3. Considérer le mêmes questions dans l'espace de dimension 3.

Exercice 8 [Facultatif] Soient A et B deux points de l'espace ambient.

1. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
2. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.