

## Fonctions de plusieurs variables

### Exercice 1 (Topologie des ensembles)

Considérons les sous-ensembles suivants de  $\mathbb{R}^2$  :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2, y \leq x + 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > x^2\},$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > x^2, y < x + 1\}.$$

Pour chacun d'entre eux, dire s'il est ouvert, fermé, borné et compact. Justifier la réponse.

### Exercice 2 (Domaine et image)

Trouver le domaine et l'image des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{e^{x+y}}{x-y}, \quad h(x, y) = \ln(x+y).$$

### Exercice 3 (Lignes de niveau)

Soit  $f$  une fonction de deux variables, de domaine  $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$ . On rappelle que, pour tout  $k \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $L_k = \{(x, y) \in \mathcal{D}_f; \text{ tel que } f(x, y) = k\}$  s'appelle *ligne de niveau*  $k$  de la fonction  $f$ .

1. Trouver les lignes de niveaux 0, 1, -1, 2 et 3 de la fonction  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  et les représenter graphiquement dans le domaine carré :  $x \in [-1, 1]$  et  $y \in [-1, 1]$ .

Même question avec  $g(x, y) = x^2 + y^2$  et  $h(x, y) = \frac{2y}{x}$  ( $x \neq 0$ ).

2. Pour la fonction  $f(x, y) = x - y - |x - y|$ , tracer les lignes de niveau pour  $k \in \mathbb{R}$ . Traiter séparément les cas  $k = 0$ ,  $k > 0$  et  $k < 0$ .

### Exercice 4 (Fonctions partielles)

Soit  $f$  une fonction de  $D \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et  $(a, b)$  un point intérieur de  $D$ . On rappelle que les fonctions à une variable

$$x \mapsto f(x, b) \quad \text{et} \quad y \mapsto f(a, y)$$

définies sur un intervalle ouvert contenant respectivement  $a$  et  $b$ , s'appellent *fonctions partielles* associées à  $f$  au point  $(a, b)$ .

Trouver les fonctions partielles aux points  $(0, 0)$  et  $(1, 2)$  de

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = xy, \quad h(x, y) = x^2y - 1.$$

### Exercice 5 (Graphe)

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ . Dessiner dans  $\mathbb{R}^2$  les lignes de niveau  $L_k$  pour  $k \in \{0, 1, 4, 9\}$ . Représenter graphiquement la surface  $z = x^2 + 4y^2$ .

### Exercice 6 (Composées)

Considérons les trois fonctions

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, & f(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & g(t) &= t^4 + 1, \\ h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & h(\rho, \theta) &= (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta). \end{aligned}$$

Quelles sont les possibles composées ? Les calculer.

### Exercice 7 (Examen 2005)

On considère la fonction de deux variables  $f(x, y) = \cos(xy)$ .

Représentez graphiquement la ligne de niveau  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\}$ .