

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 (Topologie des ensembles)

Considerons les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2, y \leq x + 1\}, \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2\}, \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > x^2\}, \\ D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > x^2, y < x + 1\}. \end{aligned}$$

Pour chacun d'entre eux, dire s'il est ouvert, fermé, borné et compact. Justifier la réponse.

Exercice 2 (Domaine et image)

Trouver le domaine et l'image des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{e^{x+y}}{x-y}, \quad h(x, y) = \ln(x+y).$$

Exercice 3 (Lignes de niveau)

Soit f une fonction de deux variables, de domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$. On rappelle que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble $L_k = \{(x, y) \in \mathcal{D}_f; f(x, y) = k\}$ s'appelle *ligne de niveau* k de la fonction f .

1. Trouver les lignes de niveaux 0, 1, -1, 2 et 3 de la fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et les représenter graphiquement dans le domaine carré : $x \in [-1, 1]$ et $y \in [-1, 1]$.
Même question avec $g(x, y) = x^2 + y^2$ et $h(x, y) = \frac{2y}{x}$ ($x \neq 0$).
2. Pour la fonction $f(x, y) = x - y - |x - y|$, tracer les lignes de niveau pour $k \in \mathbb{R}$. Traiter séparément les cas $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$.

Exercice 4 (Fonctions partielles)

Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R} et (a, b) un point intérieur de D . On rappelle que les fonctions à une variable

$$x \mapsto f(x, b) \quad \text{et} \quad y \mapsto f(a, y)$$

définies sur un intervalle ouvert contenant respectivement a et b , s'appellent *fonctions partielles* associées à f au point (a, b) .

Trouver les fonctions partielles aux points $(0, 0)$ et $(1, 2)$ de

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = xy, \quad h(x, y) = x^2y - 1.$$

Exercice 5 (Graphe)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + 4y^2$. Dessiner dans \mathbb{R}^2 les lignes de niveau L_k pour $k \in \{0, 1, 4, 9\}$. Représenter graphiquement la surface $z = x^2 + 4y^2$.

Exercice 6 (Composées)

Considerons les trois fonctions

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = t^4 + 1, \\ h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad h(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta). \end{aligned}$$

Quelles sont les possibles composées ? Les calculer.

Exercice 7 (Examen 2005)

On considère la fonction de deux variables $f(x, y) = \cos(xy)$.

Représentez graphiquement la ligne de niveau $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\}$.