Calcul différentiel

Exercice 1 (Dérivées partielles)
Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = xy^2$, b) $f(x,y) = 3xy + e^y$, c) $f(x,y) = y\sin(2xy+1)$,
d) $f(x,y) = e^{\sin(2x)+xy}$, e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+\cos y+1}$, f) $f(x,y) = \ln(x^2y^2)$.

Exercice 2 (Interpretation géométrique des dérivées partielles) [Facultatif]
Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 3x^2 + 4y^2 - 6$.

1. Soient π_1 et π_2 les plans de $\mathbb{R}^3$ passant par $(1,1,0)$ et parallèles respectivement aux plans xOz et yOz. Donner une équation cartesienne des plans π_1 et π_2.
   Ensuite trouver les courbes γ_1 et γ_2 de $\mathbb{R}^3$ obtenues comme intersection de la surface S avec les plans π_1 et π_2. [Ces courbes s'appellent *sections* de la surface S par les plans donnés.]
   Enfin calculer la pente de la tangente aux courbes γ_1 et γ_2 en tout point.
2. Donner la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui a comme graphe la surface S. Calculer les dérivées partielles de f au point $(1,1)$ et les comparer avec la pente des courbes γ_1 et γ_2.

Exercice 3 (Gradient)
Calculer le gradient des fonctions de l'Exercice 1 aux points suivants :

a) $(0,0)$, b) $(1,-1)$, c) $(2,1)$.

Exercice 4 (Dérivée directionelle)
Trouver la dérivée directionelle de la fonction $f(x,y) = xy^2$ au point $(2,1)$ le long des vecteurs suivants :

a) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, b) $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$, c) $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

Exercice 5 (Interpretation géométrique du gradient)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + 4y^2$.

1. Calculer le gradient de f au point (x,y).
2. Pour tout $k \geq 0$, décrire la ligne de niveau k de f.
3. Est-ce que le gradient de f en (x,y) est orthogonal à la courbe γ de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^2 + 4y^2 = 4$? Justifier la reponse, et donner une demonstration pour $y \geq 0$ en utilisant la fonction $y = g(x)$ qui a comme graphe la courbe γ.

Exercice 6 (Plan tangent et vecteur normal) [Facultatif]
Soit Γ_f le graphe de la fonction $f(x,y) = xy^2$. Trouver l'équation paramétrique et une équation cartesienne du plan tangent à Γ_f aux points $(0,0)$ et $(2,1)$. Trouver aussi un vecteur normale à Γ_f aux mêmes points.

Exercice 7 (Différentielle)
Trouver la différentielle au point (x,y) des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$, b) $g(x,y) = x\sin y - y\sin x$, c) $h(x,y) = \arcsin(xy)$.

Exercice 8 (Calcul d'erreur)
Pour la fonction $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$, calculer l'erreur que l'on commet si on prend la valeur de f au point $(1,1)$ au lieu qu'au point $(1.01, 1.01)$. En deduire la valeur de f au point $(1.01, 1.01)$ approximée à deux chiffres décimales.

Exercice 9 (Approximation)
La puissance utilisée dans une résistance électrique est donnée par $P = E^2/R$ (en watts), où E est la différence de potentiel électrique (en volt) et R est la résistance (en ohm). Si $E = 200$ volt et $R = 8$ ohm, quelle est la modification de la puissance si E decroît de 5 volt et R de 0.2 ohm ? Comparer les résultats obtenus par le calcul exact avec l'approximation fournie par la différentielle de $P = P(E,R)$.

Exercice 10 (Dérivée de fonctions composées 1)
Trouver la dérivée par rapport à t de

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ où $x = \sin t$ et $y = \cos t$;

b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ où $x = e^{-t}$ et $y = e^t$.

Exercice 11 (Dérivée de fonctions composées 2)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et posons $g(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

Exercice 12 (Dérivée de fonctions composées 3)
Soit $z(x) = f(x, y(x))$, où f est une fonction de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ et y une fonction dérivable dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée $z'(x)$ en fonction des dérivées de f et de y. Appliquer la formule aux cas particuliers

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ et $y = e^{3x}$;

b) $f(x,y) = xy^2 + x^2y$ et $y = \ln x$.

Exercice 13 (Matrice Hessienne)
Calculer la matrice Hessienne au point (x,y) des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$, b) $g(x,y) = x\sin y - y\sin x$, c) $h(x,y) = \arcsin(xy)$.

Exercice 14 (Équation d'onde)
Soient F et G deux fonctions de classe C^2 dans $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^*$. On pose $u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$. Montrer que u est une solution de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad \text{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 15 (Laplacien 1)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et posons $F(x,y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

1. Calculer le Laplacien de F en (x,y), c'est-à-dire la valeur $\Delta F(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)$.
2. Déterminer toutes les fonctions f telles que $\Delta F(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 16 (Laplacien 2)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable deux fois. Exprimer le Laplacien de f en coordonnées polaires $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$, en utilisant le changement de variables

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Exercice 17 (Formule de Taylor)
Donner la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 en $(0,0)$ pour les fonctions suivantes :

$$\text{a)} \quad f(x,y) = \frac{\cos x}{\cos y}, \qquad \text{b)} \quad g(x,y) = \frac{e^{\cos(x+y)}}{2+y}.$$

Exercice 18 (Points critiques et extrema)
Pour chacune des fonctions suivantes, trouver et étudier les points critiques. La fonction admet-elle des extrema locaux et des extrema globaux ?

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$ b) $f(x,y) = xe^y + ye^x$
c) $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$ d) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$
e) $f(x,y) = (3x + 4y)e^{-(x^2+y^2)}$ f) $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3$
g) $f(x,y) = x^3 + 3xy - y^2 + y + 1$ h) $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z$