Université Claude Bernard Lyon 1 — Automne 2009

PCSI L1 - UE Math2 — **Fiche 5**

Champs de vecteurs

Exercice 1 (Divergence 1)
Pour quelle fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la divergence de $\vec{V} = xz\vec{i} + y\vec{j} + f(z)\vec{k}$ est-elle égale à z ?

Exercice 2 (Divergence 2)
A tout point $M = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on associe le vecteur unitaire $\vec{u}(x, y) = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$. En posant $\rho = \| \vec{OM} \|$, montrer que la divergence du champ de vecteurs $\vec{u}(x, y)$ est égale à $1/\rho$.

Exercice 3 (Divergence et rotationnel)
Pour un champ de vecteurs $\vec{B} = xy^2\vec{i} + 2x^2yz\vec{j} + 3yz^2\vec{k}$, trouver $\mathrm{div}\vec{B}$ et $\mathrm{rot}\vec{B}$.

Exercice 4 (Champs de gradient)
Un champ de vecteurs $\vec{V}$ est un *champ de gradient* si $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ pour une fonction f qui s'appelle *potentiel scalaire* de $\vec{V}$.

Dire si les champs suivants sont des champs de gradients, et dans ce cas déterminer leurs potentiels scalaires.

1. $\vec{V}(x, y) = (y, x)$
2. $\vec{V}(x, y) = (3x^2y + 2x + y^3, x^3 + 3xy^2 - 2y)$
3. $\vec{V}(x, y) = (\cos(x), \sin(y))$
4. $\vec{V}(x, y) = (y + \dfrac{1}{x}, x + \dfrac{1}{y})$
5. $\vec{V}(x, y) = (x + y, x - y)$
6. $\vec{V}(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$

Exercice 5 (Dérivées partielles)
Un *champ central* dans $\mathbb{R}^3$ est donné par $\vec{V}(x_1, x_2, x_3) = f(r)\ \vec{x}$ où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$, et f est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradients et calculer son potentiel.

Solutions de l'exercice 4

1. $f(x, y) = xy + c$
2. $f(x, y) = x^3y + x^2 - y^2 + xy^3 + c$
3. $f(x, y) = \sin x - \cos x + c$
4. $f(x, y) = xy + \ln x + \ln y + c$
5. $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + c$
6. $f(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz + c$