

## Circulation et flux de champs de vecteurs

**Exercice 1** Soit  $\vec{V} = \frac{(x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}}{x^2 + y^2}$  un champ de vecteurs du plan.

1. Trouver le domaine de définition de  $\vec{V}$ . Est-il simplement connexe ?
2. Calculer le rotationnel de  $\vec{V}$ . Est-ce que  $\vec{V}$  est un champ de gradient ?
3. Calculer la circulation de  $\vec{V}$  le long du cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$ .

**Exercice 2** Soit  $\vec{U} = (2x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$  un champ vectoriel plan, que l'on voit comme champ  $\vec{U} + 0\vec{k}$  de  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $\vec{V} = \text{rot } \vec{U}$ .

1. Calculer la circulation de  $\vec{U}$  le long du cercle  $C$  de centre  $O$  et rayon  $R$  orienté dans le sens anti-horaire.
2. Calculer le flux de  $\vec{V}$  à travers le disque  $D$  de centre  $O$  et rayon  $R$  (en coordonnées polaires), et vérifier la formule de Green-Riemann.

**Exercice 3** Soit  $\vec{U} = (2xy - x^2)\vec{i} + (x + y^2)\vec{j}$  un champ vectoriel plan, que l'on voit comme champ  $\vec{U} + 0\vec{k}$  de  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $\vec{V} = \text{rot } \vec{U}$ .

1. Calculer la circulation de  $\vec{U}$  le long de la boucle fermée  $C$  constituée par les deux arcs de parabole  $y = x^2$  et  $x = y^2$  orientée dans le sens anti-horaire.
2. Calculer le flux de  $\vec{V}$  à travers la surface  $D$  qui a comme bord la courbe  $C$ , et vérifier la formule de Green-Riemann.

**Exercice 4** Soit  $E$  le champ de vecteur dans  $\mathbb{R}^3$  de coordonnées  $E = (y^2, z, 0)$ .

1. Calculer la circulation de  $E$  le long du segment de droite orienté reliant l'origine au point  $(1, 1, 1)$ .
2. Calculer le flux de  $E$  à travers la surface définie par  $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}$ .

**Exercice 5** On rappelle que la sphère de rayon  $R$  centrée en l'origine est paramétrée par

$$(\phi, \theta) \mapsto R(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Soit  $\Sigma$  l'intersection de la sphère avec l'ensemble  $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ , et  $E(x, y, z) = (z, 0, 0)$  un champ sur  $\mathbb{R}^3$ . Calculer le flux de  $E$  à travers  $\Sigma$ , ainsi que la circulation de  $E$  le long du bord de  $\Sigma$  contenu dans le plan  $(yOz)$ .

**Exercice 6** On considère la boîte cylindrique  $S$  composée du cylindre d'équation  $x^2 + y^2 = R^2$  et  $0 \leq z \leq h$  et de deux disques de rayon  $R$  aux niveau  $z = 0$  et  $z = h$  ( $R > 0$  et  $h > 0$ ). Soit  $\vec{V}$  le champ de vecteurs défini par

$$\vec{V}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}.$$

1. Déterminer si  $\vec{V}$  est un champ de gradient.
2. Déterminer si  $\vec{V}$  est le rotationnel d'un autre champ de vecteurs.
3. Calculer le flux de  $\vec{V}$  à travers  $S$  directement.
4. Calculer le flux de  $\vec{V}$  à travers  $S$  en utilisant la formule d'Ostrogradski.