

Circulation et flux de champs de vecteurs

Exercice 1 Soit $\vec{V} = \frac{(x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}}{x^2 + y^2}$ un champ de vecteurs du plan.

1. Trouver le domaine de définition de \vec{V} . Est-il simplement connexe ?
2. Calculer le rotationnel de \vec{V} . Est-ce que \vec{V} est un champ de gradient ?
3. Calculer la circulation de \vec{V} le long du cercle de centre O et de rayon r .

Exercice 2 Soit $\vec{U} = (2x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ un champ vectoriel plan, que l'on voit comme champ $\vec{U} + 0\vec{k}$ de \mathbb{R}^3 , et soit $\vec{V} = \text{rot } \vec{U}$.

1. Calculer la circulation de \vec{U} le long du cercle C de centre O et rayon R orienté dans le sens anti-horaire.
2. Calculer le flux de \vec{V} à travers le disque D de centre O et rayon R (en coordonnées polaires), et vérifier la formule de Green-Riemann.

Exercice 3 Soit $\vec{U} = (2xy - x^2)\vec{i} + (x + y^2)\vec{j}$ un champ vectoriel plan, que l'on voit comme champ $\vec{U} + 0\vec{k}$ de \mathbb{R}^3 , et soit $\vec{V} = \text{rot } \vec{U}$.

1. Calculer la circulation de \vec{U} le long de la boucle fermée C constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ orientée dans le sens anti-horaire.
2. Calculer le flux de \vec{V} à travers la surface D qui a comme bord la courbe C , et vérifier la formule de Green-Riemann.

Exercice 4 Soit E le champ de vecteur dans \mathbb{R}^3 de coordonnées $E = (y^2, z, 0)$.

1. Calculer la circulation de E le long du segment de droite orienté reliant l'origine au point $(1, 1, 1)$.
2. Calculer le flux de E à travers la surface définie par $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}$.

Exercice 5 On rappelle que la sphère de rayon R centrée en l'origine est paramétrée par

$$(\phi, \theta) \mapsto R(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Soit Σ l'intersection de la sphère avec l'ensemble $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, et $E(x, y, z) = (z, 0, 0)$ un champ sur \mathbb{R}^3 . Calculer le flux de E à travers Σ , ainsi que la circulation de E le long du bord de Σ contenu dans le plan (yOz) .

Exercice 6 On considère la boîte cylindrique S composée du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ et $0 \leq z \leq h$ et de deux disques de rayon R aux niveaux $z = 0$ et $z = h$ ($R > 0$ et $h > 0$). Soit \vec{V} le champ de vecteurs défini par

$$\vec{V}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}.$$

1. Déterminer si \vec{V} est un champ de gradient.
2. Déterminer si \vec{V} est le rotationnel d'un autre champ de vecteurs.
3. Calculer le flux de \vec{V} à travers S directement.
4. Calculer le flux de \vec{V} à travers S en utilisant la formule d'Ostrogradski.