

FICHE TD 2 - CALCUL DIFFÉRENTIEL

Exercice 1 (Dérivées partielles)

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad f(x, y) = xy^2, & \text{b)} \quad f(x, y) = 3xy + e^y, & \text{c)} \quad f(x, y) = y \sin(2xy + 1), \\ \text{d)} \quad f(x, y) = e^{\sin(2x) + xy}, & \text{e)} \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + \cos y + 1}, & \text{f)} \quad f(x, y) = \ln(x^2 y^2). \end{array}$$

Exercice 2 (Interpretation géométrique des dérivées partielles) [Facultatif]

Soit S la surface de \mathbb{R}^3 d'équation $z = 3x^2 + 4y^2 - 6$.

- Soient π_1 et π_2 les plans de \mathbb{R}^3 passant par $(1, 1, 0)$ et parallèles respectivement aux plans xOz et yOz .
 Donner une équation cartesienne des plans π_1 et π_2 .
 Ensuite trouver les courbes γ_1 et γ_2 de \mathbb{R}^3 obtenues comme intersection de la surface S avec les plans π_1 et π_2 . [Ces courbes s'appellent *sections* de la surface S par les plans donnés.]
 Trouver un vecteur tangent aux courbes γ_1 et γ_2 en tout point.
- Donner la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui a comme graphe la surface S . Calculer les dérivées partielles de f et les comparer avec le vecteur tangent aux courbes γ_1 et γ_2 .

Exercice 3 (Gradient)

Calculer le gradient des fonctions de l'Exercice 1 aux points suivants :

$$\text{a)} \quad (0, 0), \quad \text{b)} \quad (1, -1), \quad \text{c)} \quad (2, 1).$$

Exercice 4 (Dérivée directionnelle)

Trouver la dérivée directionnelle de la fonction $f(x, y) = xy^2$ au point $(2, 1)$ le long des vecteurs suivants :

$$\text{a)} \quad \vec{u} = \vec{i} + \vec{j}, \quad \text{b)} \quad \vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}, \quad \text{c)} \quad \vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j}.$$

Exercice 5 (Interpretation géométrique du gradient)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

- Calculer le gradient de f au point (x, y) .
- Pour tout $k \geq 0$, décrire la ligne de niveau k de f .
- Est-ce que le gradient de f en (x, y) est orthogonal à la courbe γ de \mathbb{R}^2 d'équation $x^2 + 4y^2 = 4$?
 Justifier la réponse, et donner une démonstration pour $y \geq 0$ en utilisant la fonction $y = g(x)$ qui a comme graphe la courbe γ .

Exercice 6 (Plan tangent et vecteur normal) [Facultatif]

Soit Γ_f le graphe de la fonction $f(x, y) = xy^2$. Trouver l'équation paramétrique et une équation cartesienne du plan tangent à Γ_f aux points $(0, 0)$ et $(2, 1)$. Trouver aussi un vecteur normal à Γ_f aux mêmes points.

Exercice 7 (Différentielle)

Trouver la différentielle au point (x, y) des fonctions suivantes :

$$\text{a)} \quad f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3, \quad \text{b)} \quad g(x, y) = x \sin y - y \sin x, \quad \text{c)} \quad h(x, y) = \arcsin(xy).$$

Exercice 8 (Calcul d'erreur)

Pour la fonction $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$, calculer l'erreur que l'on commet si on prend la valeur de f au point $(1, 1)$ au lieu qu'au point $(1.01, 1.01)$. En déduire la valeur de f au point $(1.01, 1.01)$ approximée à deux chiffres décimales.

Exercice 9 (Approximation)

La puissance utilisée dans une résistance électrique est donnée par $P = E^2/R$ (en watts), où E est la différence de potentiel électrique (en volt) et R est la résistance (en ohm). Si $E = 200$ volt et $R = 8$ ohm, quelle est la modification de la puissance si E décroît de 5 volt et R de 0.2 ohm? Comparer les résultats obtenus par le calcul exact avec l'approximation fournie par la différentielle de $P = P(E, R)$.

Exercice 10 (Dérivée de fonctions composées 1)

Trouver la dérivée par rapport à t de

- a) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ où $x = \sin t$ et $y = \cos t$;
b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ où $x = e^{-t}$ et $y = e^t$.

Exercice 11 (Dérivée de fonctions composées 2)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et posons $g(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f .

Exercice 12 (Dérivée de fonctions composées 3)

Soit $z(x) = f(x, y(x))$, où f est une fonction de classe C^1 dans \mathbb{R}^2 et y une fonction dérivable dans \mathbb{R} . Calculer la dérivée $z'(x)$ en fonction des dérivées de f et de y . Appliquer la formule aux cas particuliers

- a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ et $y = e^{3x}$;
b) $f(x, y) = xy^2 + x^2y$ et $y = \ln x$.

Exercice 13 (Matrice Hessienne)

Calculer la matrice Hessienne au point (x, y) des fonctions suivantes :

- a) $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$, b) $g(x, y) = x \sin y - y \sin x$, c) $h(x, y) = \arcsin(xy)$.

Exercice 14 (Équation d'onde)

Soient F et G deux fonctions de classe C^2 dans \mathbb{R} et $c \in \mathbb{R}^*$. On pose $u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$. Montrer que u est une solution de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad \text{pour tout } (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 15 (Laplacien 1)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} et posons $F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

1. Calculer le Laplacien de F en (x, y) , c'est-à-dire la valeur $\Delta F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y)$.
2. Déterminer toutes les fonctions f telles que $\Delta F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 16 (Laplacien 2)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable deux fois. Exprimer le Laplacien de f en coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$, en utilisant le changement de variables

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Exercice 17 (Formule de Taylor)

Donner la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 en $(0, 0)$ pour les fonctions suivantes :

- a) $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$, b) $g(x, y) = \frac{e^{\cos(x+y)}}{2+y}$.

Exercice 18 (Points critiques et extrema)

Pour chacune des fonctions suivantes, trouver et étudier les points critiques. La fonction admet-elle des extrema locaux et des extrema globaux ?

- a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$ b) $f(x, y) = xe^y + ye^x$
c) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$ d) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$
e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^3$
f) $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z$.