

## FICHE TD 2 - CALCUL DIFFÉRENTIEL

### Exercice 1 (Dérivées partielles)

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x, y) = xy^2, & \text{b) } f(x, y) = 3xy + e^y, & \text{c) } f(x, y) = y \sin(2xy + 1), \\ \text{d) } f(x, y) = e^{\sin(2x)+xy}, & \text{e) } f(x, y) = \sqrt{x^2 + \cos y + 1}, & \text{f) } f(x, y) = \ln(x^2 y^2). \end{array}$$

### Exercice 2 (Interpretation géométrique des dérivées partielles) [Facultatif]

Soit  $S$  la surface de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $z = 3x^2 + 4y^2 - 6$ .

- Soient  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les plans de  $\mathbb{R}^3$  passant par  $(1, 1, 0)$  et parallèles respectivement aux plans  $xOz$  et  $yOz$ .  
Donner une équation cartésienne des plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .  
Ensuite trouver les courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $\mathbb{R}^3$  obtenues comme intersection de la surface  $S$  avec les plans  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . [Ces courbes s'appellent *sections* de la surface  $S$  par les plans donnés.]  
Trouver un vecteur tangent aux courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  en tout point.
- Donner la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui a comme graphe la surface  $S$ . Calculer les dérivées partielles de  $f$  et les comparer avec le vecteur tangent aux courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

### Exercice 3 (Gradient)

Calculer le gradient des fonctions de l'Exercice 1 aux points suivants :

$$\text{a) } (0, 0), \quad \text{b) } (1, -1), \quad \text{c) } (2, 1).$$

### Exercice 4 (Dérivée directionnelle)

Trouver la dérivée directionnelle de la fonction  $f(x, y) = xy^2$  au point  $(2, 1)$  le long des vecteurs suivants :

$$\text{a) } \vec{u} = \vec{i} + \vec{j}, \quad \text{b) } \vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}, \quad \text{c) } \vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j}.$$

### Exercice 5 (Interpretation géométrique du gradient)

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ .

- Calculer le gradient de  $f$  au point  $(x, y)$ .
- Pour tout  $k \geq 0$ , décrire la ligne de niveau  $k$  de  $f$ .
- Est-ce que le gradient de  $f$  en  $(x, y)$  est orthogonal à la courbe  $\gamma$  de  $\mathbb{R}^2$  d'équation  $x^2 + 4y^2 = 4$ ?  
Justifier la réponse, et donner une démonstration pour  $y \geq 0$  en utilisant la fonction  $y = g(x)$  qui a comme graphe la courbe  $\gamma$ .

### Exercice 6 (Plan tangent et vecteur normal) [Facultatif]

Soit  $\Gamma_f$  le graphe de la fonction  $f(x, y) = xy^2$ . Trouver l'équation paramétrique et une équation cartésienne du plan tangent à  $\Gamma_f$  aux points  $(0, 0)$  et  $(2, 1)$ . Trouver aussi un vecteur normale à  $\Gamma_f$  aux mêmes points.

### Exercice 7 (Différentielle)

Trouver la différentielle au point  $(x, y)$  des fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(x, y) = x^3 y + x^2 y^2 + xy^3, \quad \text{b) } g(x, y) = x \sin y - y \sin x, \quad \text{c) } h(x, y) = \arcsin(xy).$$

### Exercice 8 (Calcul d'erreur)

Pour la fonction  $f(x, y) = x^3 y + x^2 y^2 + xy^3$ , calculer l'erreur que l'on commet si on prend la valeur de  $f$  au point  $(1, 1)$  au lieu qu'au point  $(1.01, 1.01)$ . En déduire la valeur de  $f$  au point  $(1.01, 1.01)$  approximée à deux chiffres décimales.

### Exercice 9 (Approximation)

La puissance utilisée dans une résistance électrique est donnée par  $P = E^2/R$  (en watts), où  $E$  est la différence de potentiel électrique (en volt) et  $R$  est la résistance (en ohm). Si  $E = 200$  volt et  $R = 8$  ohm, quelle est la modification de la puissance si  $E$  décroît de 5 volt et  $R$  de 0.2 ohm? Comparer les résultats obtenus par le calcul exact avec l'approximation fournie par la différentielle de  $P = P(E, R)$ .

**Exercice 10 (Dérivée de fonctions composées 1)**

Trouver la dérivée par rapport à  $t$  de

a)  $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2$  où  $x = \sin t$  et  $y = \cos t$  ;

b)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  où  $x = e^{-t}$  et  $y = e^t$ .

**Exercice 11 (Dérivée de fonctions composées 2)**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, et posons  $g(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$ . Exprimer les dérivées partielles de  $g$  en fonction de celles de  $f$ .

**Exercice 12 (Dérivée de fonctions composées 3)**

Soit  $z(x) = f(x, y(x))$ , où  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $y$  une fonction dérivable dans  $\mathbb{R}$ . Calculer la dérivée  $z'(x)$  en fonction des dérivées de  $f$  et de  $y$ . Appliquer la formule aux cas particuliers

a)  $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$  et  $y = e^{3x}$  ;

b)  $f(x, y) = xy^2 + x^2y$  et  $y = \ln x$ .

**Exercice 13 (Matrice Hessienne)**

Calculer la matrice Hessienne au point  $(x, y)$  des fonctions suivantes :

a)  $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$ ,    b)  $g(x, y) = x \sin y - y \sin x$ ,    c)  $h(x, y) = \arcsin(xy)$ .

**Exercice 14 (Équation d'onde)**

Soient  $F$  et  $G$  deux fonctions de classe  $C^2$  dans  $\mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}^*$ . On pose  $u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$ . Montrer que  $u$  est une solution de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad \text{pour tout } (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 15 (Laplacien 1)**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et posons  $F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ .

- Calculer le Laplacien de  $F$  en  $(x, y)$ , c'est-à-dire la valeur  $\Delta F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y)$ .
- Déterminer toutes les fonctions  $f$  telles que  $\Delta F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Exercice 16 (Laplacien 2)**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable deux fois. Exprimer le Laplacien de  $f$  en coordonnées polaires  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ , en utilisant le changement de variables

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

**Exercice 17 (Formule de Taylor)**

Donner la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 en  $(0, 0)$  pour les fonctions suivantes :

a)  $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$ ,    b)  $g(x, y) = \frac{e^{\cos(x+y)}}{2 + y}$ .

**Exercice 18 (Points critiques et extrema)**

Pour chacune des fonctions suivantes, trouver et étudier les points critiques. La fonction admet-elle des extrema locaux et des extrema globaux ?

- a)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$     b)  $f(x, y) = xe^y + ye^x$   
 c)  $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$     d)  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$   
 e)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^3$   
 f)  $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z$ .