FICHE TD 3 - CHAMPS DE VECTEURS

Exercice 1 (Changements de coordonnées)
Soient (x, y, z) les coordonnées cartesiennes des points de $\mathbb{R}^3$, (ρ, θ, z) les coordonnées cylindriques et (r, θ, φ) les coordonnées sphériques, définies comme dans le Formulaire distribué en cours. Montrer que, par changement de coordonnées, les derivées partielles $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}$, $\{\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}\}$ et $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\}$ se transforment comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} = \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin\theta\ \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial \rho} - \sin\theta\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos\theta\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta\ \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\ \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial y} + \sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin\theta\ \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} = -\cos\theta\ \sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial x} - \sin\theta\ \sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial y} + \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} - \cos\theta\sin\varphi\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} - \sin\theta\sin\varphi\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial r} + \cos\varphi\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} = \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial \rho} + \sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} = \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos\varphi\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases} \tag{3}$$

Exercice 2 (Divergence 1)
Pour quelle fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la divergence de $\vec{V} = xz\ \vec{i} + y\ \vec{j} + f(z)\ \vec{k}$ est-elle égale à z ?

Exercice 3 (Divergence 2)
A tout point $M = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on associe le vecteur unitaire $\vec{u}(x, y) = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$. En posant $\rho = \|\ \vec{OM}\ \|$, montrer que la divergence du champ de vecteurs $\vec{u}(x, y)$ est égale à $1/\rho$.

Exercice 4 (Divergence et rotationnel)
Pour les champs de vecteurs B suivants, trouver $\mathrm{div}\vec{B}$ et $\mathrm{rot}\vec{B}$.

1. $\vec{B} = xy^2\ \frac{\partial}{\partial x} + 2x^2yz\ \vec{j} + 3yz^2\ \vec{k}$
2. $\vec{B} = \mathrm{sh}(xyz)\ \vec{i} + \mathrm{ch}(xyz)\ \vec{j}$
3. $\vec{B} = yz\ \vec{i} + xz\ \vec{j} + xy\ \vec{k}$
4. $\vec{B} = xyz\ \vec{i}$

Exercice 5 (Champs de gradient)
Un champ de vecteurs $\vec{V}$ est un *champ de gradient* si $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ pour une fonction f qui s'appelle *potentiel scalaire* de $\vec{V}$. Dire si les champs suivants sont des champs de gradients, et dans ce cas déterminer leurs potentiels scalaires.

1. $\vec{V}(x, y) = (y, x)$
2. $\vec{V}(x, y) = (3x^2y + 2x + y^3, x^3 + 3xy^2 - 2y)$
3. $\vec{V}(x, y) = (ye^{xy}, -xe^{xy})$
4. $\vec{V}(x, y) = (\cos(x), \sin(y))$
5. $\vec{V}(x, y) = (y + \frac{1}{x}, x + \frac{1}{y})$
6. $\vec{V}(x, y) = (x + y, x - y)$
7. $\vec{V}(x, y, z) = (\frac{2}{x}, \frac{1}{y}, -\frac{1}{z})$
8. $\vec{V}(x, y, z) = (yz, -zx, xy)$
9. $\vec{V}(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$

Exercice 6 (Champ central)
Un *champ central* dans $\mathbb{R}^3$ est donné par $\vec{V}(x_1, x_2, x_3) = f(r)\ \vec{x}$ où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$, et f est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradients et calculer son potentiel.