# FICHE TD 4 - INTÉGRALES MULTIPLES ET CURVILIGNES

**Exercice 1** Calculer l'intégrale

$$\int\int_D xy\ dx\,dy$$

où $D = [0,1] \times [0,1]$.

**Exercice 2** Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x, \quad y^2 = x.$$

**Exercice 3** a) Calculer $\int\int_D (x-y)\ dx\,dy$ où $D$ est la partie du plan délimitée par les droites d'équation :

$$x = 0, \quad y = x+2, \quad y = -x.$$

b) Calculer la même intégrale au moyen du changement de variables défini par :

$$u = x+y, \qquad v = x-y.$$

**Exercice 4** Soit $D$ le quart de disque unité défini par :

$$D = \{(x,y) |\quad 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Utiliser le passage en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale :

$$\int\int_D (4 - x^2 - y^2)\ dx\,dy.$$

**Exercice 5** Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène.

**Exercice 6** Trouver le centre de gravité de la surface plane homogène délimitée par la parabole $y = 6x - x^2$ et la droite $y = x$.

**Exercice 7** a) Calculer l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y^2}{2} \leq x \leq 2\}$.

b) Calculer l'intégrale

$$\iint_D (1+xy)\ dx\,dy$$

et le comparer à l'aire de $D$.

**Exercice 8** Calculer la masse totale du cube $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^3$ ayant pour densité volumique $\mu(x,y,z) = x^2y + xz^2$. Calculer ensuite le centre d'inertie de $D$.

**Exercice 9** Calculer le volume de la boule de rayon 1 de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 10** Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

1. $\oint_{\mathcal{C}} xy^2\,dx + 2xy\,dy$, où $\mathcal{C}$ est le triangle de sommets $(0,0), (1,0), (0,1)$ parcouru dans le sens positif.
2. $\oint_{\mathcal{C}} (y+xy)\,dx$, où $\mathcal{C}$ est la courbe définie par l'arc de parabole $y = x^2$ et la portion de droite $y = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, parcourue dans le sens positif.
3. $\oint_{\mathcal{C}} (3x^2 - 8y^2)\,dx + (4y - 6xy)\,dy$, où $\mathcal{C}$ est la courbe définie par les arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ $(0 \leqslant x, y \leqslant 1)$, parcourue dans le sens positif.

**Exercice 11** 1. Calculer la longueur de l'arc de cycloïde paramétré par $x = t - \sin(t), y = 1 - \cos(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère l'hélice circulaire $\mathcal{H}$ paramétré par $x = a\,\cos(t), y = a\,\sin(t), z = b\,t$, où $a$ et $b$ sont des constantes $> 0$. Calculer la longueur de l'arc $\mathcal{C}$ de $\mathcal{H}$ correspondant à $t$ variant de 0 à $2\pi$, ainsi que l'intégrale curviligne $\int_{\mathcal{C}} (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$.