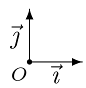
Université Claude Bernard Lyon 1
Année 2009-2010
Automne 2010

PCSI L1 S1 - UE TMB
Responsable : Alessandra Frabetti
http ://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/TMB/

GEOMETRIE ANALYTIQUE DU PLAN ET DE L'ESPACE

1 Géométrie analytique du plan

1. **Coordonnées cartesiennes des points et des vecteurs du plan :**

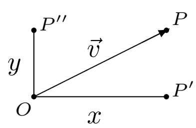
   - **Repère cartesien** ou **orthonormal direct (o.n.d.)** : $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,) =$ 

, avec $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$.

   - L'ensemble $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\,\}$ forme une **base** de l'espace vectoriel des vecteurs du plan appliqués en O, donc tout vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ est combinaison linéaire de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

   - **Coordonnées cartesiennes :** $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \iff \vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

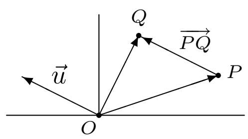
     où $\begin{cases} x = \|\overrightarrow{OP'}\| \\ y = \|\overrightarrow{OP''}\| \end{cases}$ = longueur des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$:



   - **Plan + repère cartesien** $\equiv \mathbb{R}^2$, car tout point $P \equiv$ vecteur $\overrightarrow{OP}$ = deux coordonnées x et y.

   - Attention : **Vecteur affine :** $\overrightarrow{PQ} = P + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = P + \vec{u}$,

     où $\vec{u} = (x_Q - x_P)\,\vec{\imath} + (y_Q - y_P)\,\vec{\jmath}$



2. **Calcul vectoriel en coordonnées cartesiennes :** si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors

   - **addition** : $\vec{v} + \vec{v}' = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$, ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

   - **produit par scalaire** : $t\vec{v} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}$, ex. $3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

   - **produit scalaire** : $\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy'$, ex. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 + 6 = 4$

   - **longueur** : $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, ex. $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$

   - **vecteurs orthogonaux** : $\vec{v} \perp \vec{v}' \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$, ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

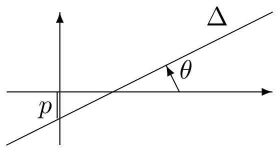
   - **vecteurs parallèles** : $\vec{v} \parallel \vec{v}' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = tx \\ y' = ty \end{cases} \quad t \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$, ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

   - **projection orthogonale** : $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(\vec{v}') = \dfrac{x'x + y'y}{x^2 + y^2}\,\vec{v}$, ex. $\mathrm{Pr}_{\vec{\imath}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{5 \times 1 - 1 \times 0}{1^2 + 0^2}\,\vec{\imath} = 5\,\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. **Droite (affine)** : $\Delta = \left\{ P = (x,y) \mid ax+by+c=0 \right\}$ avec $(a,b) \neq (0,0)$.

Si $b \neq 0$ alors $y = -\dfrac{a}{b}\, x - \dfrac{c}{b} = m\, x + p$ où $m = \tan\theta$

Si $a \neq 0$ alors $x = -\dfrac{b}{a}\, y - \dfrac{c}{a}$.



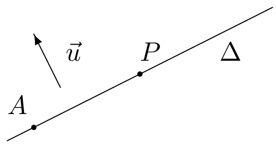
<u>Attention</u> : une droite est un espace vectoriel de dimension 1 si et seulement si elle passe par O, i.e. $c = 0$.

- **Vecteur directeur** de $\Delta = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$.

- **Vecteur orthogonal** ou **normal** à $\Delta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

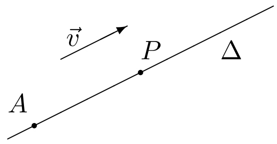
- **Droite passante par** $A = (a_1, a_2)$ **et** $\perp \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$

  $$\Delta = \left\{ (x,y) \mid u_1(x-a_1) + u_2(y-a_2) = 0 \right\}$$
  $$\iff \quad u_1 x + u_2 y - (u_1 a_1 + u_2 a_2) = 0.$$



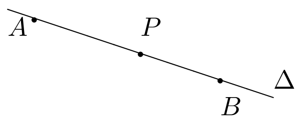
- **Droite passante par** $A = (a_1, a_2)$ **et** $\parallel \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{v}$

  $$\Delta = \left\{ P = (x,y) \mid \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v},\ t \in \mathbb{R} \right\}$$
  $$\iff \begin{cases} x = a_1 + t v_1 \\ y = a_2 + t v_2 \end{cases} \quad \textbf{éq. parametrique} \text{ de paramètre } t \in \mathbb{R}$$
  $$\iff \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} \quad \textbf{éq. cartesienne}$$



- **Droite passante par** $A = (a_1, a_2)$ **et** $B = (b_1, b_2)$: $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB}$

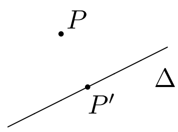
  $$\Delta = \left\{ (x,y) \mid \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} \right\}$$



4. **Distance** : $\mathrm{dist}\,(P, P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \|\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}\| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$.

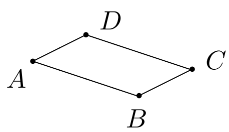
Si P' est la projection orthogonale de P sur la droite Δ, alors

$$\mathrm{dist}\,(P, \Delta) = \mathrm{dist}\,(P, P') = \frac{|\ ax + by + c\ |}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



5. **Aire du parallelogramme** de sommets A, B, C, $D = |\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}^{\perp}|$.

Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AD}^{\perp} = \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$ et Aire $= |\ xy' - yx'|$.



6. **Conique** = intersection d'un cône de l'espace avec un plan :

$$\mathcal{C} = \left\{ (x,y) \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \right\} \quad \text{où} \quad (a,b,c) \neq (0,0,0).$$

Exemples :

- **Cercle** : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, centre (a,b), rayon r.

- **Ellipse** : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, centre $(0,0)$, axes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

- **Hyperbole** : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, centre $(0,0)$, axes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, droites asymptotes $y = \pm\dfrac{b}{a}x$,

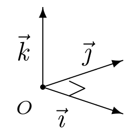
  ou bien : $y = \dfrac{a}{x}$, centre $(0,0)$, droites asymptotes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, axes = bisectrices des quadrants.

- **Parabole** : $y = ax^2 + bx + c$, axe $\vec{\jmath}$

  ou bien : $x = ay^2 + by + c$, axe $\vec{\imath}$.

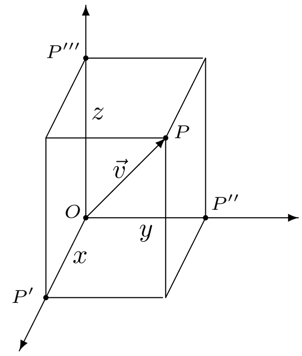
2 Géométrie analytique de l'espace

1. **Coordonnées cartesiennes des points et des vecteurs de l'espace :**

   - **Repère cartesien** ou **orthonormal direct (o.n.d.)** de l'espace : $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\, \vec{k}) =$  ,

     avec $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath} \perp \vec{k} \perp \vec{\imath}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

   - L'ensemble $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\ \}$ forme une **base** de l'espace vectoriel des vecteurs de l'espace appliqués en O, donc tout vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ est combinaison linéaire de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.



   - **Coordonnées cartesiennes :**

     $$P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \iff \vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

     où $\begin{cases} x = \|\overrightarrow{OP'}\| \\ y = \|\overrightarrow{OP''}\| \\ z = \|\overrightarrow{OP'''}\| \end{cases}$ = longueur des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$:

   - **Espace + repère cartesien =** $\mathbb{R}^3$, car tout point $P \equiv$ vecteur $\overrightarrow{OP}$ = trois coordonnées x, y et z.

   - <u>Attention</u> : **Vecteur affine :** $\overrightarrow{PQ} = P + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = P + (x_Q - x_P)\ \vec{\imath} + (y_Q - y_P)\ \vec{\jmath} + (z_Q - z_P)\ \vec{k}$.

2. **Calcul vectoriel en coordonnées cartesiennes :** Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{v}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors

   - **addition** : $\vec{v} + \vec{v}' = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$, ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

   - **produit par scalaire** : $t\vec{v} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix}$, ex. $-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

   - **produit scalaire** : $\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy' + zz'$, ex. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 6 + 4 = 8$

   - **longueur** : $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

   - **produit vectoriel** : $\vec{v} \wedge \vec{v}' = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ -xz' + zx' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$, ex. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 8 \\ -2 - 4 \\ 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$

   - **produit mixte** : $[\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}'''] = x(y'z'' - z'y'') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y'' - y'x'')$,

     ex. $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = (2 - 3) - 2(-3 - 1) + 3(2 - 2) = -1 + 8 = 7$

   - **vecteurs orthogonaux** : $\vec{v} \perp \vec{v}' \quad \Leftrightarrow \quad xx' + yy' + zz' = 0$, ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

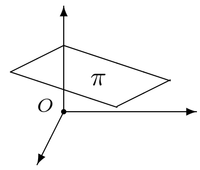
   - **vecteurs parallèles** : $\vec{v} \parallel \vec{v}' \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}' = t\vec{v} \quad \forall t \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = tx \\ y' = ty \\ z' = tz \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'} = \dfrac{z}{z'}$,

     alternative : $\vec{v} \parallel \vec{v}' \Leftrightarrow \vec{v} \wedge \vec{v}' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy' = yx' \\ yz' = zy' \\ xz' = zx' \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'} = \dfrac{z}{z'}$, ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$

   - **projection orthogonale** :

     $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(\vec{v}') = \dfrac{x'x + y'y + z'z}{x^2 + y^2 + z^2}\ \vec{v}$, ex. $\mathrm{Pr}_{5\vec{\jmath}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1 \times 0 + 2 \times 5 + 3 \times 0}{0^2 + 5^2 + 0^2}\ 5\,\vec{\jmath} = 2\,\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. **Plan (affine)** : $\pi = \Big\{ P = (x,y,z) \mid ax+by+cz+d=0 \Big\}$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.



<u>Attention</u> : un plan est un espace vectoriel de dimension 2 ssi il passe par O, i.e. $d=0$.

- **Vecteur orthogonal** ou **normal** à $\pi \;=\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

- **Plan passant par** $A=(a_1,a_2,a_3)$ **et** $\perp$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$

$$\pi = \Big\{ (x,y,z) \mid u_1(x-a_1)+u_2(y-a_2)+u_3(z-a_3)=0 \Big\}.$$

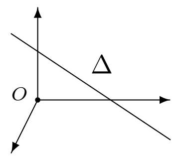
- **Plan passant par** $A=(a_1,a_2,a_3)$ **et** $\parallel$ **à** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ **et** $\vec{v}' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}$: $[\overrightarrow{AP}, \vec{v}, \vec{v}'] = 0$

$$\pi = \Big\{ P=(x,y,z) \mid \overrightarrow{AP} = t\vec{v} + t'\vec{v}',\ t,t' \in \mathbb{R} \Big\} \iff \begin{cases} x-a_1 = tv_1 + t'v'_1 \\ y-a_2 = tv_2 + t'v'_2 \\ z-a_3 = tv_3 + t'v'_3 \end{cases}$$ **éq. parametrique** de paramètres $t,t' \in \mathbb{R}$

$$\iff (x-a_1)(v_2v'_3 - v_3v'_2) - (y-a_2)(v_1v'_3 - v_3v'_1) + (z-a_3)(v_1v'_2 - v_2v'_1) = 0$$ **éq. cartesienne**

- **Plan passant par** $A=(a_1,a_2,a_3)$**,** $B=(b_1,b_2,b_3)$ **et** $C=(c_1,c_2,c_3)$: $[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$
  $\pi =$ comme ci-dessus.

4. **Droite (affine)** : $\Delta = \pi \cap \pi' = \Big\{ P=(x,y,z) \mid \begin{array}{l} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array} \Big\}$
avec $(0,0,0) \neq (a,b,c) \nparallel (a',b',c') \neq (0,0,0)$.



<u>Attention</u> : une droite est un espace vectoriel de dimension 1 ssi elle passe par O, i.e. $d=0$ et $d'=0$.

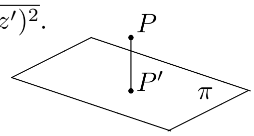
- **Droite passante par** $A=(a_1,a_2,a_3)$ **et** $\parallel$ **à** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{v}$

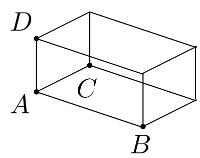
$$\Delta = \Big\{ P=(x,y,z) \mid \overrightarrow{AP} = t\vec{v},\ t \in \mathbb{R} \Big\} \iff \begin{cases} x-a_1 = tv_1 \\ y-a_2 = tv_2 \\ z-a_3 = tv_3 \end{cases}$$ **éq. parametrique** de paramètre $t \in \mathbb{R}$

$$\iff \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3}$$ **éq. cartesienne**

- **Droite passante par** $A=(a_1,a_2,a_3)$ **et** $B=(b_1,b_2,b_3)$: $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB}$, Δ comme ci-dessus.

5. **Distance** : $\mathrm{dist}\,(P,P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$.
Si P' est la projection orthogonale de P sur le plan π, alors
$$\mathrm{dist}\,(P,\pi) = \mathrm{dist}\,(P,P') = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$





6. **Volume du parallelepipède** de sommets A, B, C, D, etc $= \Big| \Big[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \Big] \Big|$.
Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$, alors Volume $= |x(y'z''-z'y'')-y(x'z''-z'x'')+z(x'y''-y'x'')|$.

7. **Quadrique :** $\mathcal{Q} = \Big\{ (x,y,z) \mid P(x,y,z) = 0 \Big\}$, où $P(x,y,z)$ est un polynôme de degré 2.
Exemples :

- **Sphère** : $x^2+y^2+z^2 = r^2$
- **Ellipsoïde** : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{c^2} = 1$
- **Hyperboloïde à une nappe** : $x^2+y^2-z^2 = 1$
- **Paraboloïde** : $z = xy$
- **Hyperboloïde à deux nappes** : $x^2-y^2-z^2 = 1$
- **Cylindre** : $x^2+y^2 = r^2$
- **Cône** : $x^2+y^2 = z^2$