Université Claude Bernard Lyon 1 — PCSI L1 - UE Math 2

CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 5 – 12 janvier 2012

Règlement – L'épreuve dure 1 heure et 30 minutes. Il est interdit d'utiliser des calculatrices. Il est admis de consulter des notes personnelles qui tiennent sur une page recto-verso et les deux fiches distribuées en cours. Les téléphones portables doivent être éteints.

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les variables (x, y, z) indiquent les coordonnées cartésiennes des points de $\mathbb{R}^3$ par rapport à ce repère.

Exercice 1 [7 pts] – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - y^3 - x^2y + 3y$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Trouver les points critiques de f et déterminer leur nature.

Exercice 2 [18 pts] – Soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par $\overrightarrow{V}(x, y, z) = 2x\,\vec{i} - y\,\vec{j} - z\,\vec{k}$.

1. Calculer la divergence de $\overrightarrow{V}$. Est-ce que $\overrightarrow{V}$ est le rotationnel d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$?
2. Calculer le rotationnel de $\overrightarrow{V}$. Est-ce que $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradient ? Si oui, calculer son potentiel.
3. Soit γ le cercle d'équations $x^2 + y^2 = 1, z = 2$ orienté dans le sens antihoraire par rapport au plan xOy (voir figure). Quelle est la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de γ ?
4. On note D le disque de bord γ et S la surface conique de sommet O et de bord γ (voir figure). En utilisant la formule d'Ostrogradski, calculer le flux sortant de $\overrightarrow{V}$ à travers la surface fermée $D \cup S$.
5. On oriente D de telle sorte que son vecteur normal soit dirigé vers le haut. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers D.
6. En déduire le flux de $\overrightarrow{V}$ sortant à travers la surface S.
7. On donne la paramétrisation suivante de S :

$$\sigma(\theta, \rho) = (x, y, z) \quad \text{où} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = 2\rho \end{cases} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{et} \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

   A l'aide de cette paramétrisation, calculer directement le flux de $\overrightarrow{V}$ sortant à travers la surface S et retrouver ainsi le résultat de la question 6 (on rappelle la formule : $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$).
8. Soit $\overrightarrow{W}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{W} = 2\,\overrightarrow{V}$. En utilisant la formule de Stokes, calculer la circulation de $\overrightarrow{W}$ le long du cercle orienté γ.