

FICHE TD 2 - CALCUL DIFFÉRENTIEL

Exercice 1 (Dérivées partielles)

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

- a) $f(x, y) = xy^2$, b) $f(x, y) = 3xy + e^y$, c) $f(x, y) = y \sin(2xy + 1)$,
d) $f(x, y) = e^{\sin(2x)+xy}$, e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + \cos y + 1}$, f) $f(x, y) = \ln(x^2 y^2)$.

Exercice 2 (Interpretation géométrique des dérivées partielles) [Facultatif]

Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 3x^2 + 4y^2 - 6$.

- Soient π_1 et π_2 les plans de $\mathbb{R}^3$ passant par $(1, 1, 0)$ et parallèles respectivement aux plans xOz et yOz .
Donner une équation cartésienne des plans π_1 et π_2 .
Ensuite trouver les courbes γ_1 et γ_2 de $\mathbb{R}^3$ obtenues comme intersection de la surface S avec les plans π_1 et π_2 . [Ces courbes s'appellent *sections* de la surface S par les plans donnés.]
Trouver un vecteur tangent aux courbes γ_1 et γ_2 en tout point.
- Donner la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui a comme graphe la surface S . Calculer les dérivées partielles de f et les comparer avec le vecteur tangent aux courbes γ_1 et γ_2 .

Exercice 3 (Gradient)

Calculer le gradient des fonctions de l'Exercice 1 aux points suivants :

- a) $(0, 0)$, b) $(1, -1)$, c) $(2, 1)$.

Exercice 4 (Dérivée directionnelle)

Trouver la dérivée directionnelle de la fonction $f(x, y) = xy^2$ au point $(2, 1)$ le long des vecteurs suivants :

- a) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, b) $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$, c) $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

Exercice 5 (Interpretation géométrique du gradient)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

- Calculer le gradient de f au point (x, y) .
- Pour tout $k \geq 0$, décrire la ligne de niveau k de f .
- Est-ce que le gradient de f en (x, y) est orthogonal à la courbe γ de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^2 + 4y^2 = 4$?
Justifier la réponse, et donner une démonstration pour $y \geq 0$ en utilisant la fonction $y = g(x)$ qui a comme graphe la courbe γ .

Exercice 6 (Plan tangent et vecteur normal) [Facultatif]

Soit Γ_f le graphe de la fonction $f(x, y) = xy^2$. Trouver l'équation paramétrique et une équation cartésienne du plan tangent à Γ_f aux points $(0, 0)$ et $(2, 1)$. Trouver aussi un vecteur normale à Γ_f aux mêmes points.

Exercice 7 (Différentielle)

Trouver la différentielle au point (x, y) des fonctions suivantes :

- a) $f(x, y) = x^3 y + x^2 y^2 + xy^3$, b) $g(x, y) = x \sin y - y \sin x$, c) $h(x, y) = \arcsin(xy)$.

Exercice 8 (Calcul d'erreur)

Pour la fonction $f(x, y) = x^3 y + x^2 y^2 + xy^3$, calculer l'erreur que l'on commet si on prend la valeur de f au point $(1, 1)$ au lieu qu'au point $(1.01, 1.01)$. En déduire la valeur de f au point $(1.01, 1.01)$ approximée à deux chiffres décimaux.

Exercice 9 (Approximation)

La puissance utilisée dans une résistance électrique est donnée par $P = E^2/R$ (en watts), où E est la différence de potentiel électrique (en volt) et R est la résistance (en ohm). Si $E = 200$ volt et $R = 8$ ohm, quelle est la modification de la puissance si E décroît de 5 volt et R de 0.2 ohm? Comparer les résultats obtenus par le calcul exact avec l'approximation fournie par la différentielle de $P = P(E, R)$.

Exercice 10 (Dérivée de fonctions composées 1)

Trouver la dérivée par rapport à t de

a) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ où $x = \sin t$ et $y = \cos t$;

b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ où $x = e^{-t}$ et $y = e^t$.

Exercice 11 (Dérivée de fonctions composées 2)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et posons $g(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f .

Exercice 12 (Dérivée de fonctions composées 3)

Soit $z(x) = f(x, y(x))$, où f est une fonction de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ et y une fonction dérivable dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée $z'(x)$ en fonction des dérivées de f et de y . Appliquer la formule aux cas particuliers

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ et $y = e^{3x}$;

b) $f(x, y) = xy^2 + x^2y$ et $y = \ln x$.

Exercice 13 (Matrice Hessienne)

Calculer la matrice Hessienne au point (x, y) des fonctions suivantes :

a) $f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$, b) $g(x, y) = x \sin y - y \sin x$, c) $h(x, y) = \arcsin(xy)$.

Exercice 14 (Équation d'onde)

Soient F et G deux fonctions de classe C^2 dans $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^*$. On pose $u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$. Montrer que u est une solution de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad \text{pour tout } (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 15 (Laplacien 1)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et posons $F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

1. Calculer le Laplacien de F en (x, y) , c'est-à-dire la valeur $\Delta F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y)$.

2. Déterminer toutes les fonctions f telles que $\Delta F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 16 (Laplacien 2)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable deux fois. Exprimer le Laplacien de f en coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$, en utilisant le changement de variables

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Exercice 17 (Formule de Taylor)

Donner la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 en $(0, 0)$ pour les fonctions suivantes :

a) $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$, b) $g(x, y) = \frac{e^{\cos(x+y)}}{2+y}$.

Exercice 18 (Points critiques et extrema)

Pour chacune des fonctions suivantes, trouver et étudier les points critiques. La fonction admet-elle des extrema locaux et des extrema globaux ?

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

b) $f(x, y) = xe^y + ye^x$

c) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

d) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$

e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^3$.