

FICHE TD 4 - INTÉGRALES MULTIPLES ET CURVILIGNES

Exercice 1 Calculer l'intégrale

$$\int \int_D xy \, dx \, dy$$

où $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

Exercice 2 Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x, \quad y^2 = x.$$

Exercice 3 a) Calculer $\int \int_D (x - y) \, dx \, dy$ où D est la partie du plan délimitée par les droites d'équation :

$$x = 0, \quad y = x + 2, \quad y = -x.$$

b) Calculer la même intégrale au moyen du changement de variables défini par :

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

Exercice 4 Soit D le quart de disque unité défini par :

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Utiliser le passage en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale :

$$\int \int_D (4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy.$$

Exercice 5 Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène.

Exercice 6 Trouver le centre de gravité de la surface plane homogène délimitée par la parabole $y = 6x - x^2$ et la droite $y = x$.

Exercice 7 a) Calculer l'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y^2}{2} \leq x \leq 2\}$.

b) Calculer l'intégrale

$$\iint_D (1 + xy) \, dx \, dy$$

et le comparer à l'aire de D .

Exercice 8 Calculer la masse totale du cube $D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ de \mathbb{R}^3 ayant pour densité volumique $\mu(x, y, z) = x^2y + xz^2$. Calculer ensuite le centre d'inertie de D .

Exercice 9 Calculer le volume de la boule de rayon 1 de \mathbb{R}^3 .

Exercice 10 Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

1. $\oint_C xy^2 \, dx + 2xy \, dy$, où C est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ parcouru dans le sens positif.
2. $\oint_C (y + xy) \, dx$, où C est la courbe définie par l'arc de parabole $y = x^2$ et la portion de droite $y = x$ ($0 \leq x \leq 1$), parcourue dans le sens positif.
3. $\oint_C (3x^2 - 8y^2) \, dx + (4y - 6xy) \, dy$, où C est la courbe définie par les arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ ($0 \leq x, y \leq 1$), parcourue dans le sens positif.

Exercice 11 1. Calculer la longueur de l'arc de cycloïde paramétré par $x = t - \sin(t)$, $y = 1 - \cos(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

2. Dans \mathbb{R}^3 on considère l'hélice circulaire \mathcal{H} paramétré par $x = a \cos(t)$, $y = a \sin(t)$, $z = bt$, où a et b sont des constantes > 0 . Calculer la longueur de l'arc \mathcal{C} de \mathcal{H} correspondant à t variant de 0 à 2π , ainsi que l'intégrale curviligne $\int_{\mathcal{C}} (y + z) \, dx + (z + x) \, dy + (x + y) \, dz$.