FICHE TD 5 - CIRCULATION ET FLUX DE CHAMPS DE VECTEURS

Exercice 1 Soit $\vec{V} = \dfrac{(x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}}{x^2+y^2}$ un champ de vecteurs du plan.

1. Trouver le domaine de définition de $\vec{V}$. Est-il simplement connexe ?
2. Calculer le rotationnel de $\vec{V}$. Est-ce que $\vec{V}$ est un champ de gradient ?
3. Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long du cercle de centre O et de rayon r.

Exercice 2 Soit $\vec{U} = (2x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ un champ vectoriel plan, que l'on voit comme champ $\vec{U} + 0\vec{k}$ de $\mathbb{R}^3$, et soit $\vec{V} = \text{rot}\vec{U}$.

1. Calculer la circulation de $\vec{U}$ le long du cercle C de centre O et rayon R orienté dans le sens anti-horaire.
2. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers le disque D de centre O et rayon R (en coordonnées polaires), et vérifier la formule de Green-Riemann.

Exercice 3 Soit $\vec{U} = (2xy - x^2)\vec{i} + (x + y^2)\vec{j}$ un champ vectoriel plan, que l'on voit comme champ $\vec{U} + 0\vec{k}$ de $\mathbb{R}^3$, et soit et $\vec{V} = \text{rot}\vec{U}$.

1. Calculer la circulation de $\vec{U}$ le long de la boucle fermée C constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ orientée dans le sens anti-horaire.
2. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers la surface D qui a comme bord la courbe C, et vérifier la formule de Green-Riemann.

Exercice 4 Soit E le champ de vecteur dans $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $E = (y^2, z, 0)$.

1. Calculer la circulation de E le long du segment de droite orienté reliant l'origine au point $(1, 1, 1)$.
2. Calculer le flux de E à travers la surface définie par $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0,\ x + y + z = 1\}$.

Exercice 5 On rappelle que la sphère de rayon R centrée en l'origine est paramétrée par

$$(\phi, \theta) \mapsto R(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta).$$

Soit Σ l'intersection de la sphère avec l'ensemble $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, et $E(x, y, z) = (z, 0, 0)$ un champ sur $\mathbb{R}^3$. Calculer le flux de E à travers Σ, ainsi que la circulation de E le long du bord de Σ contenu dans le plan (yOz).

Exercice 6 On considère la boîte cylindrique S composée du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ et $0 \leq z \leq h$ et de deux disques de rayon R aux niveau $z = 0$ et $z = h$ ($R > 0$ et $h > 0$). Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini par

$$\vec{V}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}.$$

1. Déterminer si $\vec{V}$ est un champ de gradient.
2. Déterminer si $\vec{V}$ est le rotationnel d'un autre champ de vecteurs.
3. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers S directement.
4. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers S en utilisant la formule d'Ostrogradski.