NOMBRES COMPLEXES

1 Définition des nombres complexes

1. **Unité imaginaire :** i = symbol ayant la propriété $i^2 = -1$. Attention : i n'est pas un nombre réel.
   Nombre complexe : $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels.
   Exemples : **zéro** $0 = 0 + i\,0$, **unité** $1 = 1 + i\,0$.
   Partie réelle de $z = x + iy$: c'est le nombre réel $\mathrm{Re}(z) := x$.
   Partie imaginaire de $z = x + iy$: c'est le nombre réel $\mathrm{Im}(z) := y$.
   Ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C} = \{z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}\}$;
   - sous-ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} = \{x = x + i0 \in \mathbb{C}\}$;
   - sous-ensemble des nombres **imaginaires purs** : $i\mathbb{R} = \{iy = 0 + iy \in \mathbb{C}\}$.
2. **Egalité** : $a + ib = c + id$ si et seulment si $a = c$ et $b = d$.
3. **Opérations entre nombres complexes :**
   - **addition :** $(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$;
     soustraction : $(a + ib) - (c + id) := (a - c) + i(b - d)$.
   - **multiplication :** $(a + ib)(c + id) := ac + ibc + iad + i^2bd = (ac - bd) + i(bc + ad)$;
     quotient : $\dfrac{a + ib}{c + id} = \dfrac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}$.

   Les opérations dans $\mathbb{C}$ ont les mêmes proprietés que leurs opérations analogues dans $\mathbb{R}$.
4. **Conjugué complexe** de $z = x + iy$: c'est le nombre complexe $\overline{z} := x - iy$.
   - $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
   - $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$;
   - $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
5. **Module** de $z = x + iy$: c'est le nombre réel $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.
   - $|z| \geq 0$, et $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$;
   - si $z \in \mathbb{R}$, alors $|z|$ est la valeur absolue du réel z ;
   - $|-z| = |z|$;
   - $z\overline{z} = |z|^2$, autrement dit, si $z \neq 0$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$;
   - $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, et si $z \neq 0$ alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$;
   - $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ et $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $z_1 = az_2$ pour un $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;
   - $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$, autrement dit : $\begin{cases} \text{si } |z_1| \geq |z_2| \text{ alors } |z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|, \\ \text{et si } |z_2| \geq |z_1| \text{ alors } |z_1 + z_2| \geq |z_2| - |z_1|. \end{cases}$

2 Représentation géométrique des nombres complexes

La **représentation géométrique des nombres complexes** est la correspondence qui identifie $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$, vu comme le plan euclidien muni d'un repère orthonormé (e_1, e_2) d'origine O. Dans cette correspondance :

- un point $M = (x, y)$ correspond au nombre complexe $z = x + iy$, qui s'appelle **affixe complexe** de M.

Si on denote

$\rho := \|\vec{OM}\|$ la distance du point M de l'origine O ;

$\theta := \widehat{(e_1, \vec{OM})} \pmod{2\pi}$ l'angle compris entre le vecteur e_1 et le vecteur $\vec{OM}$ (pour $M \neq O$) ;

on a alors :

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$;
- $\mathrm{Re}(z) = x = \rho\cos\theta$ et $\mathrm{Im}(z) = y = \rho\sin\theta$;
- $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\rho} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;
- $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ si $x \neq 0$, et $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$ si $y \neq 0$.

3 Représentation des nombres complexes comme exponentiels

1. **Exponentiel complexe d'argument θ :** c'est le nombre complexe $e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$.
   - exemples : $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$ et $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$;
   - $|e^{i\theta}| = 1$;
   - l'exponentiel complexe est périodique de période 2π : $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
2. **Représentation exponentielle des nombres complexes :** tout nombre complexe différent de zéro s'ecrit sous la forme

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\ \mathrm{Im}(z) = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho\ e^{i\theta}.$$

   Pour $z = \rho e^{i\theta}$, $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ des nombres complexes, et $n \in \mathbb{N}$, on a donc :
   - module : $|z| = \rho$;
   - produit : $z_1 z_2 = (\rho_1\rho_2)\ e^{i(\theta_1+\theta_2)}$,
   - puissance entière positive : $z^n = \rho^n e^{in\theta}$,
   - puissance entière negative : $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} = \dfrac{1}{\rho^n} e^{-in\theta}$ si $\rho \neq 0$,
   - racines n-ièmes : $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left\{ \sqrt[n]{\rho}\ e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ \text{avec } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 0 \leq k \leq n-1 \right\}$
     (attention : c'est un ensemble de n éléments distincts !).
   - **Formule de Moivre :** $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
     Autrement dit : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

4 Polynômes complexes

1. **Polynôme complexe :** c'est un polynôme $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ dans la variable X, avec des coefficients complexes, i.e. $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$.
   - **Racine** de $P(X)$: c'est un nombre complexe z tel que $P(z) = 0$.
   - Si z est une racine de $P(X)$, alors il existe un entier $m \geq 1$ et un polynôme $Q(X)$, tels que $P(X) = (X-z)^m Q(X)$ et $Q(z) \neq 0$. On appelle m la **multiplicité** de la racine z.
2. **Polynôme irreductible** [dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$] : c'est un polynôme qui ne se factorise pas en produit de polynômes de degrés strictement inferieurs [respectivement dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$].
   Exemples :
   - $z^2 - 1$ n'est pas irreductible, ni dans $\mathbb{R}$ ni dans $\mathbb{C}$, car $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$;
   - $z^2 + 1$ est irreductible dans $\mathbb{R}$, mais il n'est pas irreductible dans $\mathbb{C}$, car $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$.
3. **Théorème de d'Alembert-Gauss :** Tout polynôme complexe $P(X)$ se factorise comme produit

$$P(X) = a(X - z_1)^{m_1} \cdots (X - z_l)^{m_l}$$

   où $z_1, ..., z_l$ sont les racines complexes de P, de multiplicité respectives $m_1, ..., m_l$, et la somme $d := \sum_{i=1}^{l} m_i$ est le degré du polynôme P.
   - **Enoncé équivalent :** Tout polynôme complexe de degré $d \geq 1$ admet d racines complexes (eventuellement réelles et eventuellement de multiplicité $m > 1$).
   - **Polynômes complexes irréductibles :** Les polynômes complexes irreductibles sont de degré 1, c'est-à-dire qu'ils sont de la forme $a_1 X + a_0$ avec $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$.
4. **Résolution des équations complexes de degré 2 :** un polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ à coefficients complexes admet donc toujours deux racines distinctes ou une racine double, solutions de l'équation $P(X) = 0$. Pour le détérminer, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$, puis on a les deux cas suivants :
   (a) si $\Delta = 0$, alors le polynôme a une racine double $z = -b/2a$;
   (b) si $\Delta \neq 0$, alors on calcule les deux racines carrées $\delta_{1,2}$ de Δ (c'est-à-dire les nombres complexes δ tels que $\delta^2 = \Delta$). Ces deux racines carrées ont le même module $\rho = \sqrt{|\Delta|}$, et deux arguments qui different par π.
   Autrement dit, on a $\delta_1 = -\delta_2$, que l'on appelle δ. Par consequent, le polynôme $P(X)$ a deux racines complexes distinctes

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

5. **Racines complexes d'un polynôme réel :** Si $P(X)$ est un polynôme à coefficients réels, et $z \in \mathbb{C}$ est une racine complexe de $P(X)$ de multiplicité m, alors $\overline{z}$ est aussi une racine de $P(X)$, de même multiplicité m.
   - **Polynômes réels irréductibles :** Par conséquent, les polynômes réels irreductibles sont de degré 1 ou 2, c'est-à-dire qu'ils sont de la forme $a_1 X + a_0$ ou bien $a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ opportunés.
   - **Racines complexes d'un polynôme réel irréductible :** Par conséquent, tout polynôme réel irréductible de degré 2 admet deux racines complexes conjuguées, z et $\overline{z}$.