ESPACES VECTORIELS ET VECTEURS

Idée : $\begin{cases} \text{masse, charge, temperature = nombre (à part l'unité de mesure)} \longrightarrow \text{scalaire} \\ \text{force, vitesse = point d'application + direction + sense + nombre} \longrightarrow \text{vecteur} \end{cases}$

1 Espaces vectoriels

1. **Espace vectoriel** = ensemble V muni
   - d'une **addition** $+$, avec un zéro $\vec{0}$,
   - d'un **produit par scalaire** $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V :\ (t, \vec{v}) \mapsto t\ \vec{v}$ t.q. $t\ (\vec{u} + \vec{v}) = t\ \vec{u} + t\ \vec{v}$.

   On appelle **vecteurs** les éléments $\vec{v}$ de V et **scalaires** les nombres réels t.

2. **Exemples**
   (a) Les ensembles $\mathbb{R}^n := \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{C}^n := \{(z_1, ..., z_n) \mid z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}\}$ sont des espaces vectoriels avec
   - addition : $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$,
   - produit par scalaire : $t\ (x_1, ..., x_n) := (t\ x_1, ..., t\ x_n)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (b) L'ensemble des fonctions d'une variable réelle $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \mid \text{fonction avec domaine } D_f \subset \mathbb{R}\ \}$ est un espace vectoriel avec
   - addition : $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$,
   - produit par scalaire : $(t\ f)(x) := t\ f(x)$, $t \in \mathbb{R}$.

3. **Combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$,...** = vecteur $r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w} + \cdots$, où $r, s, t, ... \in \mathbb{R}$ sont les **coéfficients scalaires**.
   - Exemple dans $\mathbb{R}^3$: $2\ (1, 2, 3) + 5\ (1, -1, 0) = (7, -1, 6)$.

   Espace vectoriel **engendré** par $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ... = ensemble de leur combinaisons linéaires $\Big\{ r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w} + \cdots \mid r, s, t, ... \in \mathbb{R} \Big\}$.

   Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ... sont **linéairement dépendants** si chacun d'eux est combinaison linéaire des autres :
   - il existe une combinaison linéaire nulle ($r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w} + \cdots = 0$) avec des coéfficients scalaires pas tous nuls.

   Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ... sont **linéairement indépendants** si aucun d'eux n'est combinaison linéaire des autres :
   - $r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w} + \cdots = 0 \iff r = s = t = \cdots = 0$.

   Base de V := ensemble $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\}$ de vecteurs t.q.
   - ils engendrent V, i.e. tout autre vecteur $\vec{v}$ s'écrit comme leur combinaison linéaire : $\vec{v} = t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2 + \cdots$,
   - ils sont linéairement indépendants.

   La base n'est pas unique, mais **toutes les bases ont le même nombre d'éléments**.

   Dimension de V : $\dim V$:= nombre de vecteurs d'une base. La dimension peut être **finie** (un nombre naturel) ou **infinie**.

4. **Exemples**
   (a) Exemples dans $\mathbb{R}^2$ (valables aussi dans $\mathbb{C}$) :
   - $(1, 2)$ et $(3, 6)$ sont linéairement dépendants car $(3, 6) = 3\ (1, 2)$.
   - $(1, 2)$ et $(2, 1)$ sont linéairement indépendants car $a\ (1, 2) + b\ (2, 1) = (0, 0) \iff a = 0$ et $b = 0$.
   - Trois vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ sont toujours linéairement dépendants, ex. $(1, 2)$, $(2, 1)$ et $(1, 1)$.
   - $\vec{\imath} = (1, 0)$ et $\vec{\jmath} = (0, 1)$ sont linéairement indépendants et forment la **base canonique** de $\mathbb{R}^2$. Parfois on denote ces vecteurs par $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$.
   - En conclusion, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

   (b) Exemples dans $\mathbb{R}^3$:
   - $(1, 2, 3)$ et $(2, 4, 6)$ sont linéairement dépendants car $(2, 4, 6) = 2\ (1, 2, 3)$.
   - $(1, 2, 3)$ et $(2, 1, 3)$ sont linéairement indépendants car $a\ (1, 2, 3) + b\ (2, 1, 3) = (0, 0, 0) \iff a = 0$ et $b = 0$.
   - $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$ et $(4, 5, 9)$ sont linéairement dépendants car $(4, 5, 9) = 2\ (1, 2, 3) + (2, 1, 3)$.
   - Quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ sont toujours linéairement dépendants ;
   - $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$ sont linéairement indépendants et forment la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$. Parfois on denote ces vecteurs par $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$.
   - En conclusion, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

   (c) Pour les fonctions, on sait que $\dim \mathcal{F}(\mathbb{R}) = \infty$, mais on ne connait pas de bases.

2 Norme et produit scalaire

1. **Norme** sur V = application $\quad V \longrightarrow \mathbb{R}: \ \vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$ $\quad$ t.q.
   - $\|\vec{v}\| \geq 0$, $\quad$ et $\quad \|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$,
   - $\|t\vec{v}\| = |t| \ |\vec{v}|$, $\quad$ où $\quad |t|$ = valeur absolue,
   - $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ $\quad$ (**inegalité triangulaire**).

   Attention : les espaces vectoriels n'ont pas tous une norme.

2. **Exemples**
   (a) Dans $\mathbb{R}^3$ (valable aussi dans $\mathbb{R}^2$ et dans tout $\mathbb{R}^n$) :
      - Norme euclidienne : $\quad \|(x,y,z)\| := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;
      - Norme L^1 : $\quad \|(x,y,z)\|_1 := |x| + |y| + |z|$;
      - Norme L^p, avec $p \in \mathbb{N}$: $\quad \|(x,y,z)\|_p := \Big(|x|^p + |y|^p + |z|^p\Big)^{1/p}$ $\quad$ (la norme L^2 est la norme euclidienne) ;
      - Norme L^∞ : $\quad \|(x,y,z)\|_\infty := \max\{\ |x|, |y|, |z|\ \}$;

   (b) Dans des **sous-ensembles** opportunés de l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R})$:
      - Norme L^1 : $\quad \|f\|_1 := \int |f(x)| \ dx$;
      - Norme L^p, avec $p \in \mathbb{N}$: $\quad \|f\|_p := \Big(\int |f(x)|^p \ dx\Big)^{1/p}$ $\quad$ (la norme L^2 donne lieu à l'espace de Hilbert) ;
      - Norme L^∞ : $\quad \|f\|_\infty := \sup\{\ f(x),\ x \in D_f\ \}$;

3. **Produit scalaire** sur V = opération $\quad V \times V \longrightarrow \mathbb{R}: \ (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$ $\quad$ qui soit
   - **défini positif** : $\quad \vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ $\quad$ et $\quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$;
   - **bilinéaire** : $\quad (t\vec{u}) \cdot \vec{v} = t(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (t\vec{v})$
     $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$, $\quad$ et $\quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
   - **symmetrique** : $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

   Autre notations : $\quad \vec{v} \cdot \vec{u} \equiv \big(\vec{v}, \vec{u}\big) \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \equiv \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle$.

   Attention : les espaces vectoriels n'ont pas tous un produit scalaire.

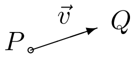
   Tout produit scalaire definit une norme : $\quad \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$. $\qquad$ (Le contraire n'est pas vrai.)

4. **Exemples**
   (a) Dans $\mathbb{R}^3$ (valable aussi dans $\mathbb{R}^2$ et dans tout $\mathbb{R}^n$) :
      - Produit scalaire euclidien : $\quad (x,y,z) \cdot (x',y',z') := x\ x' + y\ y' + z\ z'$.

   (b) Dans le **sous-ensembles** de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur un interval :
      - Produit scalaire (de Hilbert) : $\quad f \cdot g := \int f(x)\ g(x)\ dx$.

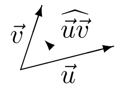
3 Vecteurs du plan et de l'espace

1. **Plan** ou **espace** = ensemble de ses points P, Q, M, A, ...

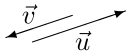
   Vecteur du plan ou de l'espace : $\vec{v} \equiv \overrightarrow{PQ}$ = flèche 

   , caracterisée par
   - le **point d'application** P ;
   - la **direction** et le **sens**, donnés par la flèche ;
   - la **longueur** $\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \mathrm{dist}\,(P,Q) \in \mathbb{R}$.

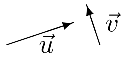
   <u>Attention</u> : souvent on identifie les vecteurs qu'on obtient par **translation**, ainsi P change mais le vecteur ne change pas.

   Angle entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ = angle $\widehat{\vec{u}\vec{v}}$ orienté de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ comme dans 

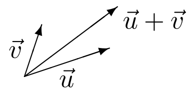
   .

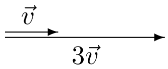
   Vecteurs parallèles ou **colinéaires** $\vec{u} \parallel \vec{v}$ si 

   , i.e. ssi $\sin(\widehat{\vec{u}\vec{v}}) = 0$.

   Vecteurs perpendiculaires ou **orthogonaux** $\vec{u} \perp \vec{v}$ si 

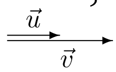
   , i.e. ssi $\cos(\widehat{\vec{u}\vec{v}}) = 0$.

2. **L'ensemble de vecteurs appliqués en un point fixé O est un espace vectoriel**, avec
   - **addition** : $\vec{u} + \vec{v} :=$ vecteur diagonale du parallèlogramme de cotés $\vec{u}$ et $\vec{v}$, par ex. 

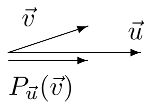
   - **produit par scalaire** : si $t \in \mathbb{R}$, $t\,\vec{v} :=$ vecteur avec meme direction que $\vec{v}$ et longueur $\|\,t\,\vec{v}\| = t\,\|\vec{v}\|$, par ex. 

   <u>Attention</u> : l'ensemble des vecteurs appliqués en tous les points n'est pas un espace vectoriel (il s'appelle **espace affine**).

   Le produit par scalaire **caracterise les vecteurs parallèles** : $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} = t\vec{v}$ pour un $t \neq 0$.

   Bases de vecteurs :
   - **Un vecteur $\vec{v}$ engendre une droite**, $\Delta = \Big\{ t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \Big\}$.
   - **Deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{u}$ et $\vec{v}$ engendrent un plan**, $\pi = \Big\{ s\vec{u} + t\vec{v} \mid s, t \in \mathbb{R} \Big\}$.
   - Attention : deux vecteurs linéairement dépendants n'engendrent pas un plan mais une droite. 

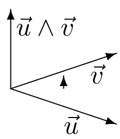
   .
   - **Trois vecteurs linéairement indépendants engendrent tout l'espace**.
   - Attention : trois vecteurs linéairement dépendants peuvent engendrent une droite ou un plan.

3. **Produit scalaire** : $\vec{v} \cdot \vec{u} := \|\vec{v}\|\;\|\vec{u}\|\;\cos(\widehat{\vec{v}\vec{u}}) \in \mathbb{R}$.
   - La **norme induite** $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ est la **longueur des vecteurs**.
   - Le produit scalaire **caracterise les vecteurs orthogonaux** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$.
   - Le produit scalaire **donne l'aire** : $|\vec{u} \cdot \vec{v}^{\perp}| =$ aire du parallelogramme de cotés $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   - **Projection orthogonale de $\vec{u}$ sur la droite de direction $\vec{v}$** : $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(\vec{u}) := \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\;\vec{v}$, ex. 

   .
   - <u>Dans l'espace</u> :

     Projection orthogonale de $\vec{u}$ sur le plan engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $\mathrm{Pr}_{\vec{v},\vec{w}}(\vec{u}) := \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\;\vec{v} + \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\;\vec{w}$.

4. <u>Dans l'espace</u> :

   Produit vectoriel : $\vec{u} \wedge \vec{v} :=$ <u>vecteur</u> avec longueur $\|\vec{u}\|\;\|\vec{v}\|\;\sin(\widehat{\vec{u}\vec{v}})$ et direction **orthogonale directe** 

   .
   - Le produit vectoriel est **bilinéaire** :

     $(t\vec{u}) \wedge \vec{v} = t(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (t\vec{v})$,

     $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$, et $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.
   - Le produit vectoriel est **anti-symmetrique** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
   - Le produit vectoriel **caracterise les vecteurs parallèles** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \parallel \vec{v}$ (comme $\vec{u} = t\,\vec{v}$ avec $t \neq 0$).

   Produit mixte : $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ (<u>scalaire</u> !).
   - Le produit mixte est **trilinéaire** :

     $[t\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, t\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, t\vec{w}] = t[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$,

     $[\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}]$, etc.
   - Le produit mixte a une **symmetrie mixte** :

     $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$.
   - Le produit mixte **donne le volume** : $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| =$ volume du parallelepipède de cotés $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.