FICHE TD 2 - ESPACES VECTORIELS ET VECTEURS

EXERCICES OBLIGATOIRES

Exercice 1 (Combinaisons linéaires)
Montrer que le vecteur $\vec{u} = (5, 2, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des trois vecteurs

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 1), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 1), \quad \vec{e}_3 = (1, 1, 0).$$

[C'est-à-dire que $\vec{u}$ peut s'écrire sous la forme $\vec{u} = a\ \vec{e}_1 + b\ \vec{e}_2 + c\ \vec{e}_3$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.]

Exercice 2 (Vecteurs linéairement indépendants)
Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont-ils linéairement indépendants ?

a) $(3, 2)$ et $(1, 5)$,
b) $(1, 0)$ et $(-1, 1)$,
c) $(2, -1, 1)$ et $(4, 2, -2)$,
d) $(2, -1, 1)$ et $(4, -2, 2)$,
e) $(3, 1, 2)$, $(1, -1, 0)$ et $(0, 2, 5)$,
f) $(3, 1, 2)$, $(1, -1, 0)$ et $(5, -1, 2)$,
g) $(1, -1, 5)$, $(-2, 2, -10)$ et $(-2, 1, 3)$,
h) $(1, -1, 5)$, $(1, -1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Exercice 3 (Bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$)

1. Les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?
2. Les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ de l'exercice 1 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4 (Produit scalaire et vecteurs orthogonaux dans le plan)
On fixe un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans le plan, et on considère les deux vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

1. Calculer les scalaires $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. Calculer et dessiner le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ et les deux vecteurs $\vec{u}^{\perp}$ orthogonaux à $\vec{u}$ et de même norme.

Exercice 5 (Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace)
On fixe un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans l'espace ambient et on considère les trois vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, et $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

1. Calculer les scalaires $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. Dessiner les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, ensuite calculer et dessiner les vecteurs $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{u}$, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.
3. Comparer le produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ avec le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICES FACULTATIFS

Exercice 6 (Base de $\mathbb{R}^3$)
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 0)$ et $\vec{v} = (-6, 0, 2)$.

1. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement independants.
2. Trouver un vecteurs $\vec{w} \in \mathbb{R}$ qui soit linéairement independant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 (Base de vecteurs dans l'espace)
On fixe un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans l'espace ambient et on considère les trois vecteurs

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{k}, \qquad \vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} - \frac{1}{2}\,\vec{k}, \qquad \vec{w} = -\vec{j}.$$

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace vectoriel.
2. Calculer les normes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, puis les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

Exercice 8 (Identités notables du calcul vectoriel)
Demontrer que pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace on a :

1. $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\ \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\ \vec{w}$, et
   $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\ \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\ \vec{u}$;
2. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$;
3. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\Big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\Big)$;
4. les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

[Indication : fixer un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et effectuer un calcul composante par composante.]