FICHE TD 3 - GEOMETRIE ANALYTIQUE DU PLAN ET DE L'ESPACE

Dans les exercises suivants, on fixe un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans le plan et un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans l'espace.

EXERCICES OBLIGATOIRES

Exercice 1 (Droites du plan, 1)
Dans le plan, on considère les deux points $A = (1, 3)$ et $B = (-1, 0)$. Déterminer :

1. l'équation de la droite Δ passant par A et B ;
2. l'équation de la droite parallèle à Δ passant par O ;
3. l'équation de la droite orthogonale à Δ passant par O ;
4. [Facultatif] la distance entre A et B ;
5. [Facultatif] l'aire du parallelogramme de cotés $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Exercice 2 (Droites du plan, 2)
Dans le plan, on considère le point $A = (5, 3)$ et la droite Δ d'équation $x - y + 1 = 0$. Déterminer :

1. l'équation de la droite parallèle à Δ passant par A ;
2. l'équation de la droite perpendiculaire à Δ passant par A ;
3. [Facultatif] la distance du point A à la droite Δ ;
4. [Facultatif] la projection orthogonale de A sur Δ.

Exercice 3 (Coniques)
Décrire et dessiner les coniques suivantes, ainsi que leurs axes de symétrie ou leurs asymptotes :

1. $(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 9$,
2. $x^2 - 4y^2 = 1$,
3. $x = (y - 1)^2 + 1$,
4. l'intersection du cône d'équation $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ avec le plan d'équation $z = 1$.

Exercice 4 (Plans de l'espace)
Dans l'espace, on considère le point $A = (1, 2, 3)$. Écrire l'équation du plan

1. passant par A et orthogonal au vecteur $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$;
2. passant par A et parallèle au plan $3x - 2y + 4z - 5 = 0$;
3. passant par A, $B = (3, -2, 1)$ et $C = (5, 0, -4)$.

Exercice 5 (Droites de l'espace)
Dans l'espace, on donne les trois points $A = (0, 1, 2)$, $B = (-1, 0, 1)$ et $C = (1, 1, 0)$. Déterminer :

1. l'équation paramétrique de la droite Δ passant par A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BC}$;
2. l'intersection de la droite Δ avec le plan d'équation $z = 0$;
3. l'équation cartésienne de la droite Δ ;
4. l'équation du plan contenant la droite Δ et passant par O ;
5. [Facultatif] le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

EXERCICES FACULTATIFS

Exercice 6 On considère les points $A = (2, 5)$, $B = (8, -1)$ et $C = (10, 5)$ du plan.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\vec{AD} = 9\vec{i} + 3\vec{j}$ et montrer que les points B, C, D sont alignés.
2. Déterminer le point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme et en calculer l'aire.

Exercice 7 Soient A et B deux points du plan.

1. Déterminer et dessiner l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.
   (<u>Indication</u> : introduire le point I milieu de $[AB]$.)
3. Considérer le mêmes questions dans l'espace de dimension 3.

Exercice 8 Soient A et B deux points de l'espace ambient.

1. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
2. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

Exercice 9 Déterminer la longueur de la diagonale du cube unité de $\mathbb{R}^3$ de deux manières différentes :

1. gémétriquement, en utilisant deux fois Pythagore ;
2. analytiquement, en utilisant la distance dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 Dans l'espace, on considère les deux droites

$$\Delta : \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Delta' : \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que les deux droites ne sont pas parallèles.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que Δ et Δ' soient concourantes (elles s'intersectent). Dans ce cas, déterminer l'équation de leur plan.

Exercice 11

1. Déterminer l'équation cartésienne des plans π contentant la droite $\Delta : \begin{cases} x = 6 - 3z \\ x = 3y - 7 \end{cases}$ et situés à distance 1 du point $A = (1, 1, 2)$.
2. Trouver l'équation cartésienne du plan $\pi^\perp$ perpendiculaire au plan $\pi : x - y + z + 24 = 0$ et contenant la droite $\Delta : \begin{cases} 2x - y + 2z + 4 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

Exercice 12 Trouver la perpendiculaire commune aux deux droites

$$\Delta : \begin{cases} x + y - 3z + 4 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Delta' : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = z - 1 \end{cases}.$$

Exercice 13 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que les trois plans d'équation

$$\pi_1 : x + \lambda y - z + 1 = 0, \quad \pi_2 : (\lambda + 1)x + 3y + 4z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad \pi_3 : y + (2\lambda + 4)z - (2\lambda + 2) = 0$$

contiennent une même droite.