

FICHE TD 4 - APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

Exercice 1 (Applications linéaires)

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier la réponse.

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + 3y, 3x - 5y)$;
2. $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + 2y + 1, y - z^2 - x)$;
3. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (3x + 2y, x, |x|)$.

Exercice 2 (Produit de matrices)

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles ? En calculer au moins cinq.

Exercice 3 (Déterminants et matrices inverses)

Calculer le déterminant et, si elle existe, la matrice inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Applications linéaires et matrices, 1)

Soient $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $L' : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ les deux applications linéaires définies, en coordonnées cartésiennes, par

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -y \\ x - 2y \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad L' \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - w \\ 2v \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les applications composées $L' \circ L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $L \circ L' : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
2. Trouver les matrices A et A' qui représentent L et L' dans les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .
3. Vérifier que les produits $A'A$ et AA' représentent les composées $L' \circ L$ et $L \circ L'$.

Exercice 5 (Applications linéaires et matrices, 2)

Soit $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie, en coordonnées cartésiennes, par

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice A associée à L , et son déterminant $\det A$.
2. Est-ce que la matrice A est inversible ? Si elle l'est, calculer son inverse A^{-1} .
3. Est-ce que l'application L est un isomorphisme ?
4. Calculer la réciproque L^{-1} de l'application linéaire L .
5. Si on considère le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^2 , est-ce que l'application L est une isométrie ?