FICHE TD 3 - CHAMPS DE VECTEURS

Exercice 1 (Changements de coordonnées)
Soient (x,y,z) les coordonnées cartesiennes des points de $\mathbb{R}^3$, (ρ,θ,z) les coordonnées cylindriques et (r,θ,φ) les coordonnées sphériques, définies comme dans le Formulaire distribué en cours. Montrer que, par changement de coordonnées, les derivées partielles $\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\}$, $\{\frac{\partial}{\partial \rho},\frac{\partial}{\partial \theta},\frac{\partial}{\partial z}\}$ et $\{\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial \theta},\frac{\partial}{\partial \varphi}\}$ se transforment comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\rho} = \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} = -\sin\theta\ \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial\rho} - \sin\theta\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial\rho} + \cos\theta\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta\ \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\ \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial y} + \sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} = -\sin\theta\ \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} = -\cos\theta\ \sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial x} - \sin\theta\ \sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial y} + \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\theta\sin\varphi\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\theta\sin\varphi\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial r} + \cos\varphi\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} = \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial\rho} + \sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial\rho} + \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial\rho} = \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial\rho} + \cos\varphi\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{cases} \tag{3}$$

Exercice 2 (Champs de vecteurs)

1. Donner l'allure graphique des champs vectoriels suivants, définis sur $\mathbb{R}^2$.
   (a) $\vec{V}(x,y) = \vec{i} + \vec{j}$
   (b) $\vec{V}(x,y) = (x+1, y)$
   (c) $\vec{V}(x,y) = y\ \frac{\partial}{\partial x} + x\ \frac{\partial}{\partial y}$
   (d) $\vec{V}(\rho,\theta) = \rho\ \vec{e}_\theta$
   (e) $\vec{V}(\rho,\theta) = \vec{e}_\rho + \rho\ \vec{e}_\theta$
2. Même question pour les champs vectoriels suivants, définis sur $\mathbb{R}^3$.
   (a) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$
   (b) $\vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} + y\ \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$
   (c) $\vec{V}(r,\theta,\varphi) = r\ \vec{e}_\theta + r\ \vec{e}_\varphi$
3. Pour les champs vectoriels précédents, calculer $\mathrm{div}\vec{V}$.

Exercice 3 (Divergence 1)

1. Pour quelle fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la divergence de $\vec{V} = xz\ \vec{i} + y\ \vec{j} + f(z)\ \vec{k}$ est-elle égale à z ?
2. Pour quelle fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a-t-on $\mathrm{div}\vec{V} = 0$ pour les champs de vecteurs $\vec{V}$ suivants :
   (a) $\vec{V}(x,y,z) = xz\vec{i} + y\vec{j} + (f(z) - z^2/2)\vec{k}$
   (b) $\vec{V}(x,y,z) = xf(y)\vec{i} - f(y)\vec{j}$
   (c) $\vec{V}(x,y,z) = xf(x)\vec{i} - y\vec{j} - zf(x)\vec{k}$

Exercice 4 (Divergence 2)
Pour les champs de vecteurs $\vec{E}$ suivants, définis sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, calculer la divergence en fonction de $\rho = \| \vec{OM} \|$ où $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\vec{E}(M) = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$
2. $\vec{E}(M) = \| \vec{OM} \| \cdot \vec{OM}$
3. $\vec{E}(M) = \left(\frac{\|\vec{OM}\|^2+1}{\|\vec{OM}\|}\right) \cdot \vec{OM}$

Exercice 5 (Divergence 3)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{U}, \vec{V}$ deux champs de vecteurs différentiables définis sur $\mathbb{R}^3$.

Montrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\vec{U} + \vec{V}) &= \mathrm{div}\vec{U} + \mathrm{div}\vec{V} \\ \mathrm{div}(\alpha\ \vec{V}) &= \alpha\ \mathrm{div}\vec{V} \\ \mathrm{div}(f\ \vec{V}) &= f\ \mathrm{div}\vec{V} + \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \cdot \vec{V} \end{aligned}$$

Exercice 6 (Divergence et rotationnel)
Pour les champs de vecteurs $\vec{B}$ suivants, défini sur $\mathbb{R}^3$, trouver $\mathrm{div}\vec{B}$ et $\mathrm{rot}\vec{B}$.

1. $\vec{B}(x, y, z) = xy^2\ \frac{\partial}{\partial x} + 2x^2yz\ \frac{\partial}{\partial y} + 3yz^2\ \frac{\partial}{\partial z}$
2. $\vec{B}(x, y, z) = \mathrm{sh}(xyz)\ \vec{i} + \mathrm{ch}(xyz)\ \vec{j}$
3. $\vec{B}(x, y, z) = yz\ \vec{i} + xz\ \vec{j} + xy\ \vec{k}$
4. $\vec{B}(x, y, z) = xyz\ \frac{\partial}{\partial x}$

Exercice 7 (Champs de gradient)
Un champ de vecteurs $\vec{V}$ est un *champ de gradient* si $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ pour une fonction f qui s'appelle *potentiel scalaire* de $\vec{V}$. Dire si les champs suivants sont des champs de gradient, et dans ce cas déterminer leurs potentiels scalaires.

1. $\vec{V}(x, y) = (y, x)$
2. $\vec{V}(x, y) = (3x^2y + 2x + y^3)\ \frac{\partial}{\partial x} + (x^3 + 3xy^2 - 2y)\ \frac{\partial}{\partial y}$
3. $\vec{V}(x, y) = ye^{xy}\ \vec{i} - xe^{xy}\ \vec{j}$
4. $\vec{V}(x, y) = \cos x\ \frac{\partial}{\partial x} + \sin y\ \frac{\partial}{\partial y}$
5. $\vec{V}(x, y) = (y + \frac{1}{x}, x + \frac{1}{y})$
6. $\vec{V}(x, y) = (x + y, x - y)$
7. $\vec{V}(x, y, z) = \frac{2}{x}\ \vec{i} + \frac{1}{y}\ \vec{j} - \frac{1}{z}\ \vec{k}$
8. $\vec{V}(x, y, z) = (yz, -zx, xy)$
9. $\vec{V}(x, y, z) = (x^2 - yz)\ \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - zx)\ \frac{\partial}{\partial y} + (z^2 - xy)\ \frac{\partial}{\partial z}$

Exercice 8 (Champ central)
Un *champ central* dans $\mathbb{R}^3$ est un champ de la forme

$$\vec{V}(x_1, x_2, x_3) = f(r)\ \vec{x}$$

où

$$\begin{aligned} &\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k} = (x_1, x_2, x_3) && \text{est le vecteur associé au point,} \\ &r = \| \vec{x} \|^2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} && \text{est la distance du point de l'origine, et} \\ &f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} && \text{est une application dérivable.} \end{aligned}$$

Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradient et calculer son potentiel.